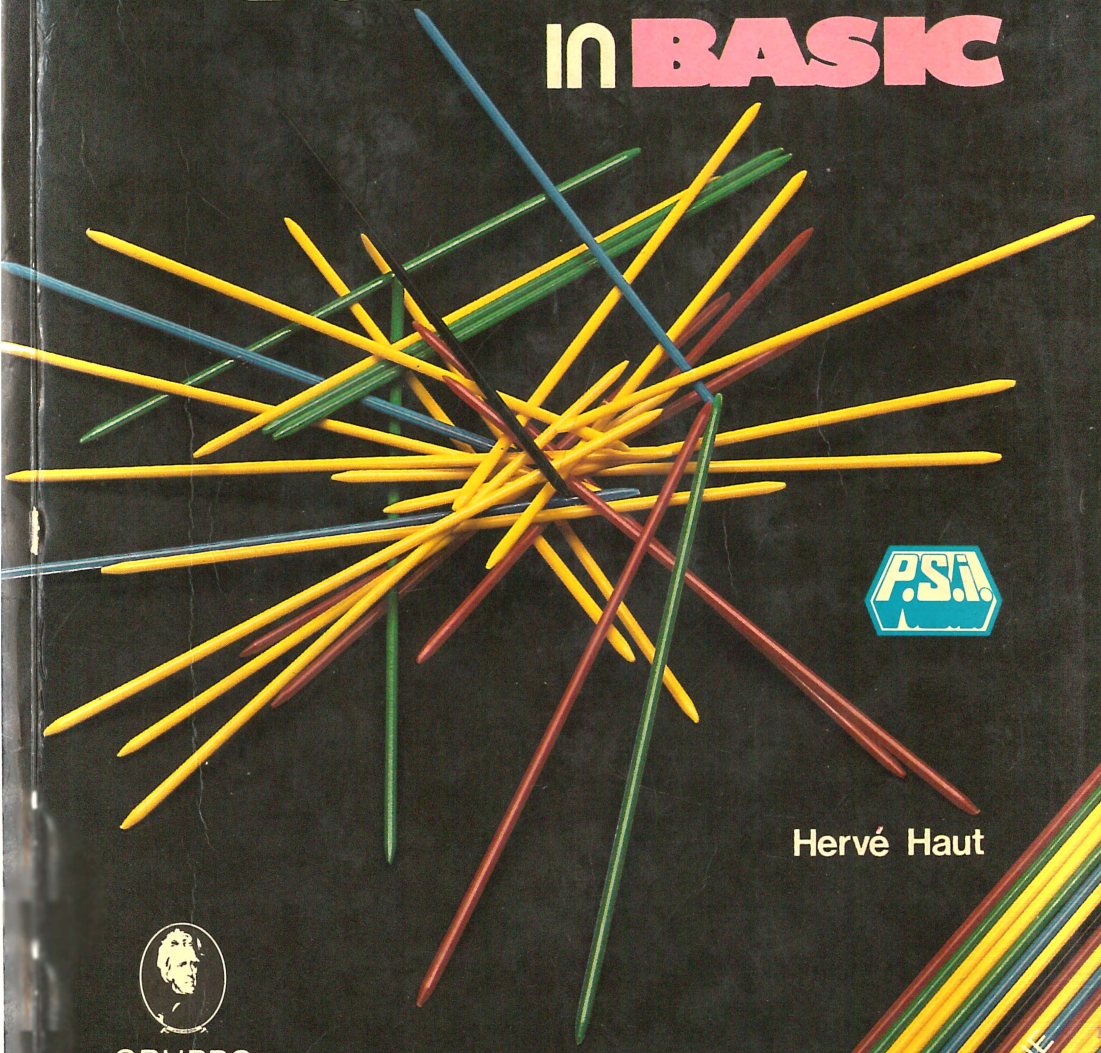
PROGRAMMI DI MATEMATICA E STATISTICA IN BASIC



P.S.I.

Hervé Haut

GRUPPO
EDITORIALE
JACKSON

EDIZIONE ITALIANA

PROGRAMMI DI MATEMATICA E STATISTICA in BASIC

di
Hervé Haut

GRUPPO
EDITORIALE
JACKSON
Via Rosellini, 12
20124 Milano

Hervé Haut è ingegnere civile e Dottore in Scienze Fisiche.

Egli è attualmente assistente della cattedra di radioprotezione dell'Università Cattolica "Louvain La Neuve" in Belgio.

© Copyright per l'edizione originale P.S.I. Editions du P.S.I. - 1981
© Copyright per l'edizione originale italiana Gruppo Editoriale Jackson s.r.l. - 1982

Il Gruppo Editoriale Jackson ringrazia per il prezioso lavoro svolto nella stesura dell'edizione italiana la signora Francesca di Fiore e l'Ing. Roberto Pancaldi.

Tutti i diritti sono riservati. Stampato in Italia. Nessuna parte di questo libro può essere riprodotta, memorizzata in sistemi di archivio, o trasmessa in qualsiasi forma o mezzo, elettronico, meccanico, fotocopia, registrazione o altri senza la preventiva autorizzazione scritta dell'editore.

Prima edizione dicembre 1982

Stampato in Italia da:
S.p.A. Alberto Matarelli - Milano - Stabilimento Grafico

Fotocomposizione CorpoNove s.n.c. - Bergamo - tel. (035) 22.33.63-22.33.65

SOMMARIO

A — PROGRAMMI MATEMATICI

1 — Interpolazione polinominale di Lagrange 1
2 — Valore numerico di un polinomio e delle sue derivate 9
3 — Derivazione numerica di una funzione discreta (interpolazione di Newton) 19
4 — Radici di equazioni di secondo, terzo e quarto grado 31
5 — Integrazione numerica: 49
— regola di Simpson (2n intervalli)
— regola di Bode (10 punti)
— regola di Gauss (12 punti)
— regola di Chebyshev (9 punti)
— estremo superiore infinito
6 — Equazioni differenziali di primo e secondo ordine 65
7 — Grafico di una funzione 77
8 — Ricerca degli zeri di una funzione 87
9 — Risoluzione dell'equazione matriciale AX = B (inversione di una matrice) 95
10 — Autovalori ed autovettori di una matrice reale simmetrica 115

B — PROGRAMMI STATISTICI

11 — Calcolo delle funzioni statistiche per una o due variabili 129
12 — Calcolo delle medie e dei momenti di una variabile stocastica . . . 139
13 — Distribuzioni statistiche: 147
— distribuzione binomiale
— distribuzione di Poisson
— distribuzione normale
— distribuzione normale a due variabili
— distribuzione in chi-quadro
— distribuzione t di Student
14 — Regressione ad un parametro: 173
— regressione lineare semplice
— adattamento ad una curva del tipo $y = ax^b$
— adattamento ad una curva esponenziale
— adattamento ad una curva logaritmica
15 — Regressione lineare multipla 189
16 — Adattamento ad un polinomio 205

BIBLIOGRAFIA 217

PRESENTAZIONE

I programmi presentati in quest'opera sono stati scelti in modo da portare il lettore a formarsi una logica di base per la risoluzione di problemi di tipo matematico o statistico.

Per la codifica di tali programmi si è utilizzato il Basic Applesoft implementato sul sistema Apple II, ma, dato che le particolarità di questa versione del Basic sono state utilizzate essenzialmente nella gestione dell'Input-Output e non nelle routines di calcolo, risulta molto semplice adattare questi stessi programmi ad un'altra versione del linguaggio Basic.

Per consentire un approccio graduale alle tecniche dell'analisi numerica, ci si è sforzati di presentare i problemi in ordine di difficoltà crescente. Fanno eccezione i primi due programmi di statistica (numeri 11 e 12) che per la semplicità di sviluppo potrebbero essere trattati anche prima di tutti gli altri.

Ad ogni programma si è preposta una esposizione schematica del metodo numerico e delle tecniche di programmazione utilizzati. Il lettore che trovasse insufficiente questa esposizione potrà comunque consultare la bibliografia consigliata a cui l'autore ha fatto specifico riferimento.

Completa ogni capitolo, oltre ovviamente al listato del programma, il diagramma a blocchi relativo all'algoritmo utilizzato (stilato secondo i criteri di normalizzazione AFNOR — ISO) e un esempio pratico in cui, tra l'altro, vengono specificati il tempo e la quantità di memoria utilizzati.

Nell'intento di permettere al lettore di inserire ciascuno dei programmi presentati in un disegno più vasto, si sono strutturati i programmi stessi nel modo seguente:

- *un programma generale che assicura esclusivamente la gestione corretta su video dell'input-output;*
- *una routine che rappresenta la risoluzione del problema proposto e che può essere a sua volta suddivisa in più subroutines.*

Per ogni procedura vengono dettagliate le regole per l'uso con particolare riguardo

a: dati necessari (in input), risultati forniti, variabili, vettori e matrici utilizzati, funzioni e sottoprogrammi richiamati.

Il dimensionamento dei vettori e delle matrici viene fatto nel programma principale in modo da evitare l'errore "redim'd array" se uno di questi viene utilizzato in più procedure, oppure se viene più volte richiamata la procedura che contiene un'istruzione di dimensionamento.

Consigliamo al lettore, per approfondire la comprensione dei programmi, di provare ogni programma proposto con un semplice esempio e di seguirne l'andamento passo passo, in modo da afferrare meglio il meccanismo degli algoritmi utilizzati.

PROGRAMMA NUMERO 1

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE DI LAGRANGE

Si supponga di conoscere i valori di una funzione $y = f(x)$ in $n + 1$ punti $[y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)]$ e di voler calcolare il valore di y corrispondente ad un generico valore di x.

L'interpolazione polinomiale di Lagrange risolve questo problema permettendo di costruire una funzione polinomiale $p(x)$ (di grado minore o uguale a n) passante per gli $n+1$ punti del piano (x, y).

Il valore cercato di y si può allora facilmente ricavare dal polinomio interpolatore $p(x)$ $[y = p(x)]$.

Il valore cercato di y si può allora facilmente ricavare dal polinomio interpolatore $p(x)$ $[y = p(x)]$.

1 — METODO NUMERICO

Date $n+1$ coppie di valori (x_i, y_i), si definiscono "funzioni elementari di Lagrange" relative a tali punti le funzioni $L_i(x)$

$$(1) \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

Si può verificare facilmente che queste funzioni soddisfano alla seguente proprietà:

$$L_i(x_k) = \delta_{ik} \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \qquad \text{ove} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = k \\ 0 \text{ se } i \neq k \end{cases}$$

Il polinomio

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, L_i(x) \tag{2}$$

soddisfa le condizioni $y_i = p(x_i)$ in quanto risulta:

$$p(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, L_i(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, \delta_{ik} = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

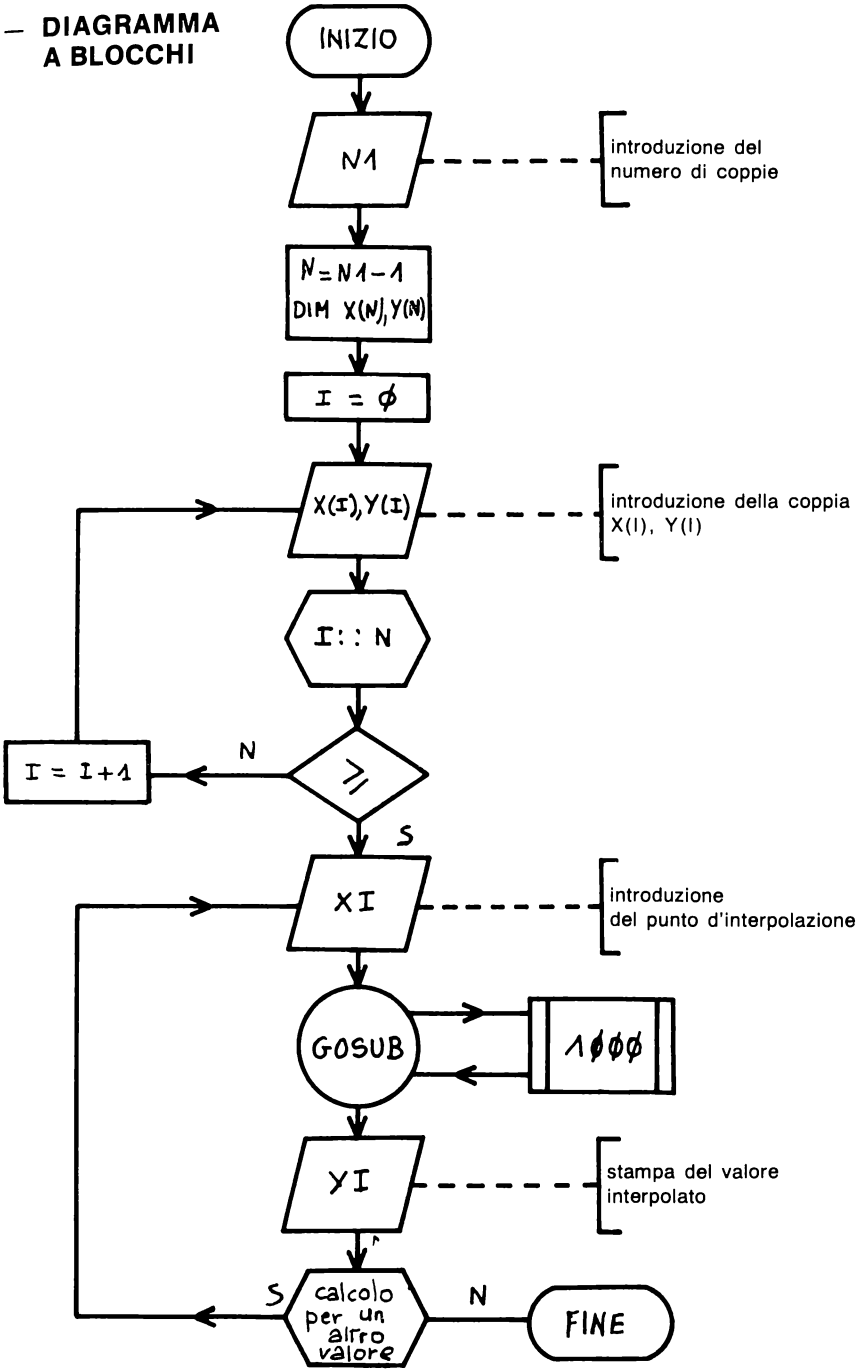
e pertanto l'espressione (2) rappresenta il polinomio interpolatore di Lagrange. Questo polinomio permette di interpolare in un punto qualsiasi la funzione definita dalle $n+1$ coppie x_i, y_i.

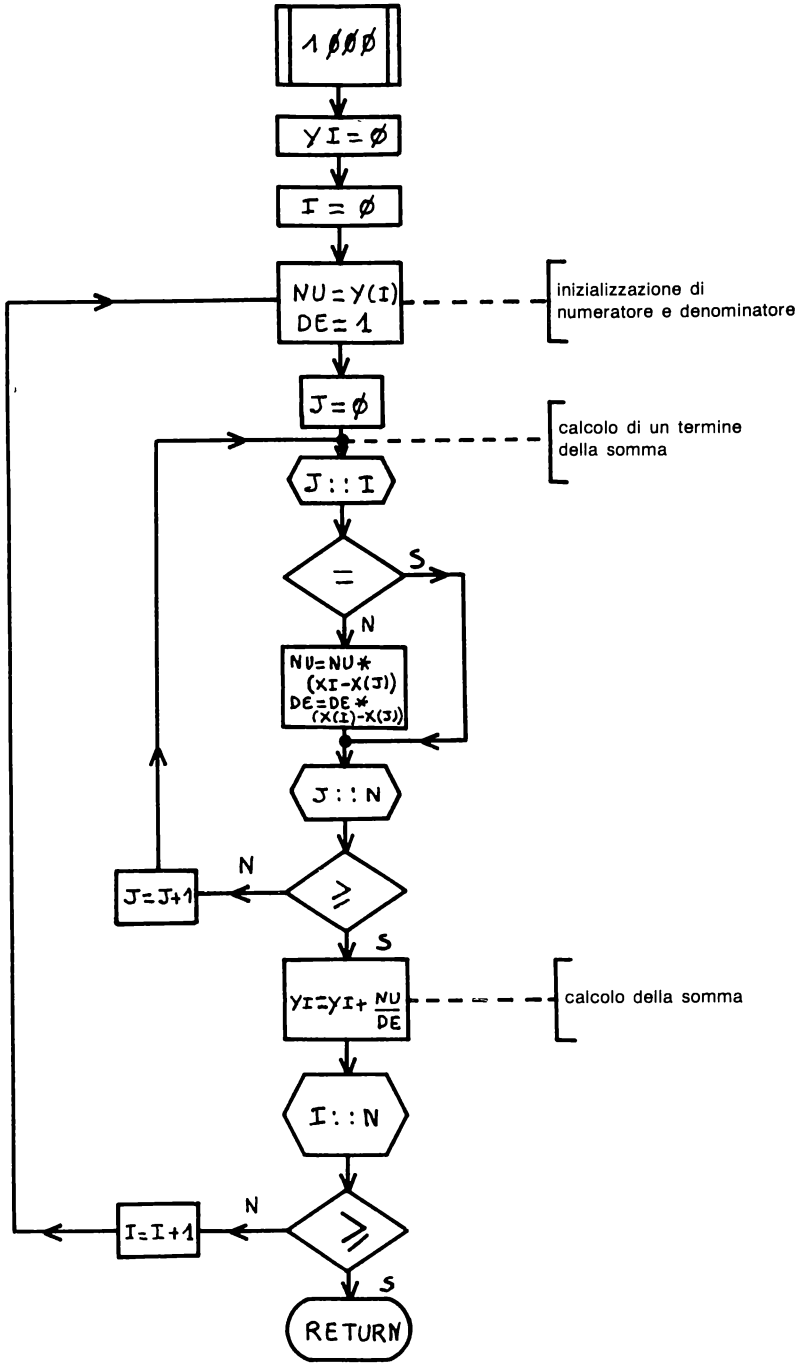
Riferimenti bibliografici: A2, B1, B2, C2, H1, L3.

2 — TECNICA DI PROGRAMMAZIONE

Le $N+1$ coppie di valori (X_i, Y_i) vengono memorizzate nei due vettori X(I) e Y(I) (I = 0, 1, ..., N). L'espressione (2) è allora calcolata mediante un ciclo (I = 0, 1, ..., N) in cui ogni termine della (2) è a sua volta calcolato, per X = XI, mediante un ciclo (J = 0, 1, ..., I−1, I+1, ..., N) applicando la formula (1).

3 — DIAGRAMMA A BLOCCHI




1000
YI=0
I=0
NU=Y(I)
DE=1
inizializzazione di numeratore e denominatore
J=0
calcolo di un termine della somma
J::I
=
S
N
NU=NU*(XI-X(J))
DE=DE*(X(I)-X(J))
J::N
≥
N
J=J+1
S
YI=YI+NU/DE
calcolo della somma
I::N
≥
N
I=I+1
S
RETURN

4 — PROGRAMMA

```
1  REM        INTERPOLAZIONE POLINOMIALE
2  REM              DI LAGRANGE
3  REM
4  REM                  AUTORE:H.HAUT
6  REM
7  REM
8  REM     DESCRIZIONE:
9  REM         QUESTO PROGRAMMA CONSENTE IL CALCOLO DEL
10  REM        VALORE DEL POLINOMIO INTERPOLATORE
11  REM        DI LAGRANGE PASSANTE PER UN NUMERO ARBITRARIO
12  REM        DI PUNTI (X,Y)
13  REM
14  REM    ***********************************************
15  REM
16  REM
100  REM
110  REM     REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT : PRINT "        INTERPOLAZIONE POLINOMIALE": PRINT "         DI
     LAGRANGE"
150  PRINT : PRINT "                    AUTORE: H.HAUT"
160  VTAB (10)
170  PRINT "  1.INTRODURRE IL NUMERO DI COPPIE": PRINT "    CHE DEFINISCON
     O IL POLINOMIO": PRINT "    INTERPOLATORE": PRINT "    (N+1 COPPIE DE
     FINISCONO UN POLINOMIO    DI GRADO N)"
180  PRINT
190  PRINT "  2.INTRODURRE SUCCESSIVAMENTE LE COPPIE    X,Y": PRINT
200  PRINT "  3.DEFINIRE LA VARIABILE X PER CUI": PRINT "    SI VUOLE CALC
     OLARE IL VALORE": PRINT "    DI INTERPOLAZIONE PER Y"
210  VTAB (23): HTAB (5): PRINT "PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE ": GET A$

220  HOME
230  REM
240  REM     GESTIONE DEI DATI IN INPUT
250  REM
260  INPUT "IL NUMERO DI COPPIE=";N1:N = N1 - 1
270  REM
280  REM     ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
290  REM
300  DIM X(N),Y(N)
310  FOR I = 0 TO N: REM    INSERIMENTO DATI
320  PRINT "COPPIA ";I + 1;":"
330  INPUT "         X=";X(I)
340  INPUT "         Y=";Y(I)
350  NEXT I
360  PRINT : INPUT "INTERPOLAZIONE PER X=";XI
370  REM
380  REM     CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
390  REM
400  GOSUB 1000
410  REM
420  REM    GESTIONE DEI RISULTATI
430  REM
440  PRINT "VALORE INTERPOLATO Y=";YI
450  PRINT : INPUT "VOLETE L'INTERPOLAZIONE PER UN ALTRO    VALORE (S O N)
      ? ";A$
460  IF A$ = "S" THEN  GOTO 360
470  END
1000  REM  ***********************************************
1010  REM   SOTTOPROGRAMMA PER IL CALCOLO DELL'INTERPOLAZIONE
1020  REM   POLINOMIALE DI LAGRANGE
1030  REM
1040  REM
```

```
1050  REM
1060  REM      1.DATI NECESSARI
1070  REM        * N=GRADO DEL POLINOMIO=NUMERO DI COPPIE -1!)
1080  REM        * X(I) E  Y(I)  (I=0,1,...,N) =VETTORI
1090  REM          CONTENENTI LE N+1 COPPIE (X,Y)
1100  REM        * XI=VALORE DI X PER CUI L'INTER-
1110  REM          POLAZIONE DEVE ESSERE CALCOLATA
1120  REM      2.RISULTATI FORNITI:
1130  REM        * YI=RISULTATO DELL'INTERPOLAZIONE
1140  REM      3.VARIABILI UTILIZZATE:
1150  REM        DE,I,J,N,NU,XI,YI
1160  REM      4.VETTORI UTILIZZATI:
1170  REM        X(N),Y(N)
1180  REM  ***********************************************
1190 YI = 0
1200  FOR I = 0 TO N
1210 NU = Y(I): REM       INIZIALIZZAZIONE DEL NUMERATORE
1220 DE = 1: REM          E DEL DENOMINATORE
1225  REM
1230  REM   CALCOLO DI UN TERMINE DELLA SOMMA
1240  FOR J = 0 TO N
1250  IF J = I THEN  GOTO 1280
1260 NU = NU * (XI - X(J))
1270 DE = DE * (X(I) - X(J))
1280  NEXT J
1285  REM
1290  REM    CALCOLO DELLA SOMMATORIA
1300 YI = YI + NU / DE
1310  NEXT I
1320  RETURN
```

5 — ESEMPIO PRATICO

Si cerchi il valore di interpolazione per X = 3.5 ed X = 4.2 di una funzione definita dalle cinque coppie:

X,Y = (0,1), (1,–1), (2,–13), (4,5), (5,131)

```
RUN

       INTERPOLAZIONE POLINOMIALE
        DI LAGRANGE

                    AUTORE: H.HAUT
  1.INTRODURRE IL NUMERO DI COPPIE
    CHE DEFINISCONO IL POLINOMIO
    INTERPOLATORE
    (N+1 COPPIE DEFINISCONO UN POLINOMIO
    DI GRADO N)

  2.INTRODURRE SUCCESSIVAMENTE LE COPPIE
    X,Y

  3.DEFINIRE LA VARIABILE X PER CUI
    SI VUOLE CALCOLARE IL VALORE
    DI INTERPOLAZIONE PER Y
    PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
IL NUMERO DI COPPIE=5
COPPIA 1:
        X=0
        Y=1
```

```
COPPIA 2:
         X=1
         Y=-1
COPPIA 3:
         X=2
         Y=-13
COPPIA 4:
         X=4
         Y=5
COPPIA 5:
         X=5
         Y=131

INTERPOLAZIONE PER X=3.5
VALORE INTERPOLATO Y=-16.9375

VOLETE L'INTERPOLAZIONE PER UN ALTRO
VALORE (S O N) ? S

INTERPOLAZIONE PER Y=4.2
VALORE INTERPOLATO Y=20.0175999

VOLETE L'INTERPOLAZIONE PER UN ALTRO
VALORE (S O N) ? N
```

tempo d'esecuzione: 1"
memoria richiesta: 2484 bytes (senza REM : 768)

PROGRAMMA NUMERO 2

VALORE NUMERICO DI UN POLINOMIO E DELLE SUE DERIVATE

Si vuole calcolare il valore assunto da un polinomio dato (di grado n) e dalle sue derivate in un generico punto x_0.

1 — METODO NUMERICO

1.1 — Calcolo del valore del polinomio per $x = x_0$

Sia dato il polinomio:

$$(1) \qquad p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

Per calcolare il valore assunto da tale polinomio per $x = x_0$ si consideri l'espressione (1) (con $x = x_0$) scritta nella seguente forma equivalente:

$$p(x_0) = (\ldots (((a_0 x_0 + a_1) x_0 + a_2) x_0 + a_3) x_0 + \ldots) x_0 + a_n$$

da cui si ricava facilmente l'algoritmo di calcolo, noto sotto il nome di algoritmo di Horner - Ruffini:

definiti per il polinomio (1) e per il valore x_0 i numeri di Horner nel modo seguente:

$$k_0 = a_0$$
$$k_1 = k_0 x_0 + a_1$$
$$k_2 = k_1 x_0 + a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$k_i = k_{i-1} x_0 + a_i$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$k_n = k_{n-1} x_0 + a_n$$

si avrà

$$p(x_0) = k_n$$

1.2 — Calcolo delle derivate

1.2.1 — DERIVATA PRIMA

La derivata di $p(x)$ sarà un polinomio di grado $n - 1$.
Definito un polinomio $p_1(x)$ tale che:

$$(3) \qquad p(x) = p(x_0) + (x - x_0)\, p_1(x)$$

si ponga

$$(4) \qquad p_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i\, x^{n-1-i}$$

Derivando entrambi i termini della (3) e ponendo $x = x_0$ si ottiene:

$$p'(x_0) = p_1(x_0)$$

Dunque il valore della derivata di $p(x)$ in x_0 coincide con il valore assunto dal polinomio $p_1(x)$ nello stesso punto.

Utilizzando la (3) e la (4) si può allora scrivere:

$$(5) \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^{n-i} = p(x_0) + (x + x_0) \sum_{i=0}^{n-1} b_i\, x^{n-1-i}$$

e, tramite un confronto tra i due membri esprimere i coefficienti b_i in funzione dei coefficienti a_i.
Si può facilmente verificare che i coefficienti del polinomio $p_1(x)$ sono uguali ai primi n numeri di Horner di $p(x_0)$: $b_i = k_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$.

Per calcolare il valore del polinomio $p_1(x) = p'(x)$ nel punto x_0 si può applicare ora l'algoritmo di Horner.
Definiti i numeri di Horner per $p_1(x_0)$ come:

$$(6) \qquad \begin{aligned} q_0 &= k_0 \\ q_1 &= q_0\, x_0 + k_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1} &= q_{n-2}\, x_0 + k_{n-1} \end{aligned}$$

si ottiene:

$$p'(x_0) = q_{n-1}$$

1.2.2 – DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Generalizzando il ragionamento del paragrafo precedente e definiti i polinomi

$$p_m(x) = p_m(x_0) + (x - x_0)\, p_{m+1}(x_0), \quad (m = 0, 1, \ldots, n - 1)$$

si può dimostrare che:

– $p(x) = p_0(x)$
– il valore della derivata di ordine i di $p(x)$ nel punto $x = x_0$ è dato da:

(7) $$p^{(i)}(x_0) = i!\, p_i(x_0).$$

– i coefficienti del polinomio $p_i(x)$ sono i numeri di Horner relativi al polinomio $p_{i-1}(x_0)$.

Queste considerazioni permettono di sviluppare dettagliatamente l'algoritmo richiesto.

Riferimenti bibliografici: C1, D1, L3.

2 – TECNICA DI PROGRAMMAZIONE

I coefficienti a_i sono memorizzati in un vettore A(I), 1 = 0, 1, ..., N.

2.1 – Calcolo di $p(x_0)$

Si segue scrupolosamente l'algoritmo (2), inizializzando P = A(0) ed eseguendo ciclicamente N volte l'espressione P = P * X0 + A(I).

All'uscita dal ciclo la variabile P conterrà il valore assunto dal polinomio p(x) per $x = x_0$.

2.2 – Calcolo di $p(x_0)$ e di $p'(x_0)$

Si inizializzano le variabili P1 e P rispettivamente con i valori 0 e A(0).

Si calcolano ciclicamente per N volte i valori delle espressioni

P1 = P1 * X0 + P e P = P * X0 + A(I)

seguendo gli algoritmi (3) e (6).

All'uscita dal ciclo si avrà:

$$P = p(x_0) \text{ e } P1 = p'(x_0)$$

2.3 — Calcolo di p(x) e delle sue derivate per $x = x_0$

Si utilizza un vettore P(I) (I = 0, 1, ..., N) in cui l'elemento i-esimo è destinato a contenere il valore della derivata i-esima di p(x) calcolata per $x = x_0$. [Si ponga $P(0) = p_0(x_0) = p(x_0)$].

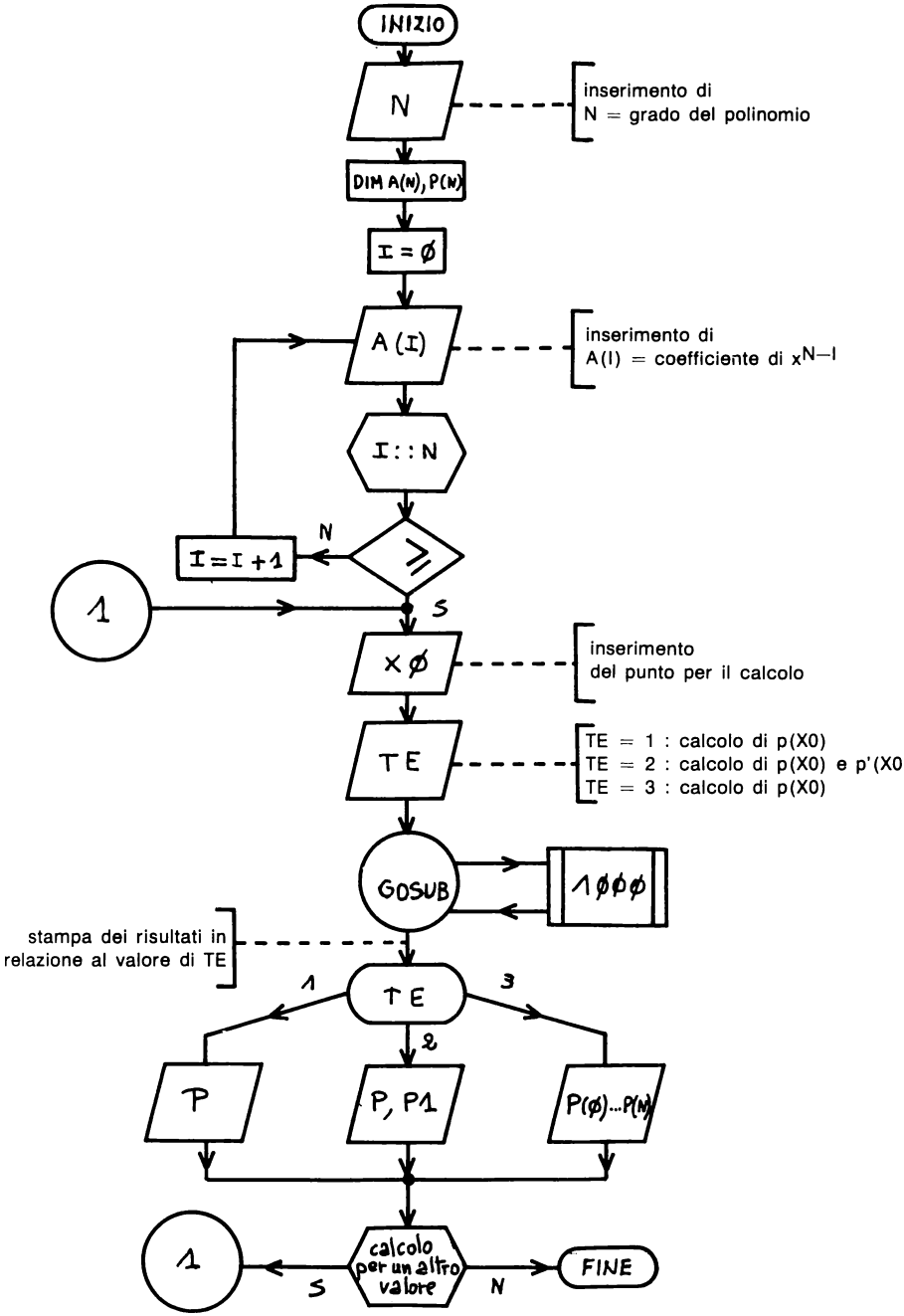
Inizializzato il vettore P con i valori P(I) = A(N—1) si procede nel calcolo mediante N passaggi successivi (I = 1, ..., N) secondo lo schema seguente:
Nel passaggio I-esimo si calcola ciclicamente per N — I — 1 volte l'espressione

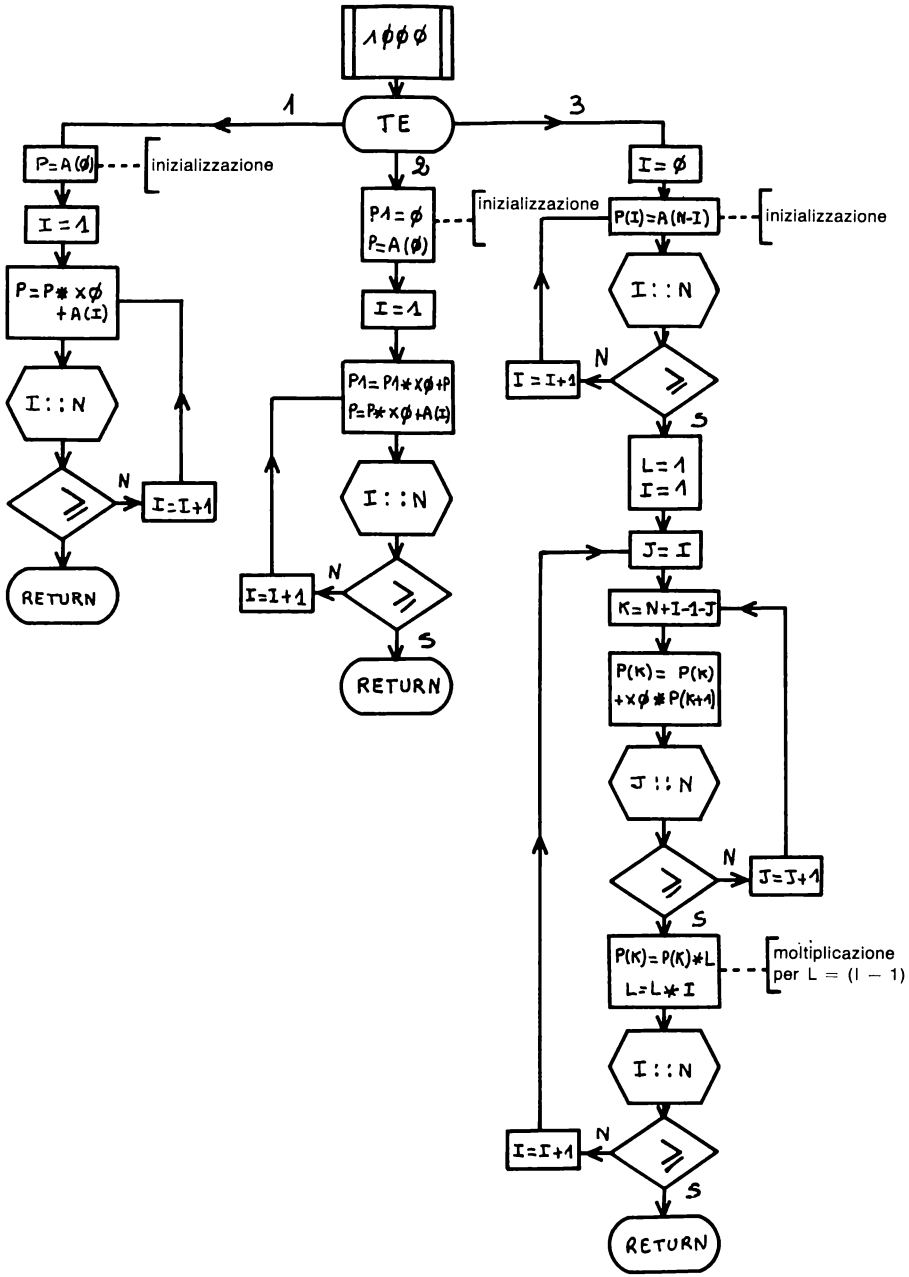
$$P(J) = P(J) + X0 * P(J+1) \qquad (J = N-1, N-2, \ldots, I-1)$$

Dopo ogni passaggio, l'ultima componente del vettore P calcolata [vale a dire P(I — 1)] viene moltiplicata per il fattoriale di (I — 1), conformemente a quanto espresso nella formula (7).

I = 1	I = 2	...	I = N − 1	I = N
P(N−1) = P(N−1) + X0 • P (N) P(N−2) = P(N−2) + X0 • P(N−1) . . P(0) = P(0) + X0 • P (1)	P(N−1) = P(N−1) + X0 • P (N) P(N−2) = P(N−2) + X0 • P (N−1) . . P(1) = P(1) + X0 • P (2)	... ...	P(N−1) = P(N−1) + X0 • P(N) P(N−2) = P(N−2) + X0 • P (N−1)	P(N−1) = P(N−1) + X0 • P (N)

3 — DIAGRAMMA A BLOCCHI




100
TE
1
2
3
P=A(0)
inizializzazione
I=1
P=P*x0 +A(I)
I::N
N
I=I+1
RETURN
P1=0
P=A(0)
inizializzazione
I=1
P1=P1*x0+P
P=P*x0+A(I)
I::N
N
I=I+1
S
RETURN
I=0
P(I)=A(N-I)
inizializzazione
I::N
N
I=I+1
S
L=1
I=1
J=I
K=N+I-1-J
P(K)= P(K) +x0*P(K+1)
J::N
N
J=J+1
S
P(K)=P(K)*L
L=L*I
moltiplicazione per L = (I − 1)!
I::N
N
I=I+1
S
RETURN

4 — PROGRAMMA

```
1   REM        CALCOLO DEL VALORE
2   REM      NUMERICO DI UN POLINOMIO
3   REM        E DELLE SUE DERIVATE
4   REM
5   REM         AUTORE:H.HAUT
6   REM
7   REM
8   REM    DESCRIZIONE:DOPO AVER INTRODOTTO
9   REM        I COEFFICIENTI DEL POLINOMIO
10  REM        E IL PUNTO PER CUI SI VUOLE ESEGUIRE
11  REM        IL CALCOLO, IL PROGRAMMA CALCOLA
12  REM        IL VALORE DEL POLINOMIO NEL PUNTO
13  REM        OPPURE TALE VALORE E QUELLO
14  REM        DELLA DERIVATA PRIMA,OPPURE
15  REM        IL VALORE DEL POLINOMIO E DI
16  REM        TUTTE LE SUE DERIVATE,A SCELTA
17  REM
18  REM   ***********************************
19  REM
20  REM
100  REM
110  REM
120  REM
130  HOME
140  PRINT : PRINT "  CALCOLO DEL VALORE NUMERICO DI UN       POLINOMIO E
     DELLE DERIVATE "
150  PRINT : PRINT "                          AUTORE:H.HAUT":
160  PRINT " REGOLE D'USO:": PRINT
170  PRINT "      1.INTRODURRE DI SEGUITO IL GRADO          DEL POLINOMIO,I
      COEFFICIENTI E            IL PUNTO DI CALCOLO": PRINT
180  PRINT "      2.SCEGLIERE IL TIPO DI CALCOLO:
                                  1=VALORE DEL POLINOMIO                    2
     =VALORE DEL POLINOMIO E DELLA              DERIVATA PRIMA"
190  PRINT "           3=VALORE DEL POLINOMIO E                    DI TUTTE L
     E DERIVATE"
200  PRINT : PRINT "SIMBOLOGIA:P0(X)=VALORE DEL POLINOMIO                P1(
     X),P2(X)...PN(X)=VALORI                DELLE DERIVATE "
210  PRINT : PRINT "PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE": GET A$
220  HOME
230  REM
240  REM   GESTIONE DEI DATI IN INPUT
250  REM
260  INPUT "GRADO DEL POLINOMIO ";N: PRINT
270  REM
280  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
290  REM
300  DIM A(N),P(N)
310  PRINT : FOR I = 0 TO N: HTAB (5): PRINT "COEF. DI X^";N   I:CV =  PEEK
     (37): VTAB (CV): HTAB (20): INPUT "=";A(I): NEXT I
320  PRINT : INPUT "CALCOLO NEL PUNTO X0=";X0
330  PRINT : INPUT "TIPO DI CALCOLO SCELTO ";TE
340  REM
350  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
360  REM
370  GOSUB 1000
380  REM
390  REM   GESTIONE DEI RISULTATI
400  REM
410  HOME
420  IF TE = 1 THEN  PRINT "P0(";X0;")=";P: GOTO 480
430  IF TE = 2 THEN  PRINT "P0(";X0;")=";P: PRINT "P1(";X0;")=";P1: GOTO 4
     80
440  FOR I = 0 TO N: PRINT "P";I;"(";X0;")=";P(I),: NEXT I: GOTO 480
450  REM
460  REM   POSSIBILITA' DI CALCOLO IN UN ALTRO PUNTO
```

```
470  REM
480  PRINT : PRINT "VOLETE IL CALCOLO PER UN ALTRO PUNTO?  ": INPUT "
     (S O N): ";A$
490  IF A$ = "S" THEN  GOTO 320
500  END
1000  REM  ****************************************
1010  REM   SOTTOPROGRAMMA PER IL CALCOLO DEL
1020  REM   VALORE DEL POLINOMIO IN X0
1030  REM    P(X)=A(0) X^N+A(1) X^(N-1)+...+A(N-1) X+A(N)
1040  REM   E DI TUTTE LE SUE DERIVATE
1050  REM
1060  REM    REGOLE D'USO:
1070  REM    1.DATI NECESSARI:
1080  REM       * N=GRADO DEL POLINOMIO
1090  REM       * A(I)=VETTORE DEI COEFFICIENTI
1100  REM         SECONDO IL MODELLO DELLA RIGA 1030
1110  REM       * X0=PUNTO DI CALCOLO
1120  REM       * TE=1,2,3 :
1130  REM           1=CALCOLO DI P(X0)
1140  REM           2=CALCOLO DI P(X0) E  P'(X0)
1150  REM           3=CALCOLO DI P(X0) E DI TUTTE LE DERIVATE
1160  REM    2.RISULTATI FORNITI:
1170  REM       *SE TE=1,P=P(X0)
1180  REM       *SE TE=2,P=P(X0) E P1=SUA DERIVATA PRIMA
1190  REM       *SE TE=3,P(0)=P(X0);P(1)...P(N)=LE DERIVATE
1200  REM        SUCCESSIVE IN X=X0
1210  REM
1220  REM    3.VARIABILI UTILIZZATE:
1230  REM       I,J,K,L,N,P,P1,X0
1240  REM    4.VETTORI UTILIZZATI:
1250  REM       A(N),P(N)
1260  REM  ****************************************
1270  REM    SCELTA DEL TIPO DI CALCOLO
1280  ON TE GOTO 1300,1360,1430
1290  REM  TE=1
1300 P = A(0)
1310  FOR I = 1 TO N
1320 P = P * X0 + A(I)
1330  NEXT I
1340  RETURN
1350  REM  TE=2
1360 P1 = 0:P = A(0)
1370  FOR I = 1 TO N
1380 P1 = P1 * X0 + P
1390 P = P * X0 + A(I)
1400  NEXT I
1410  RETURN
1420  REM  TE=3
1430  FOR I = 0 TO N:P(I) = A(N - I): NEXT I
1440 L = 1: REM     INIZIALIZZAZIONE DEL FATTORIALE
1450  FOR I = 1 TO N
1460  FOR J = I TO N
1470 K = N + I - 1 - J
1480 P(K) = P(K) + X0 * P(K + 1)
1490  NEXT J
1500 P(K) = P(K) * L
1510 L = L * I
1520  NEXT I
1530 P(N) = P(N) * L
1540  RETURN
```

5 — ESEMPIO PRATICO

Si vuole calcolare il valore del polinomio di quinto grado:

$x^5 + 4x^2 + x - 2$ e delle sue derivate per $x = 2$.

```
RUN

 CALCOLO DEL VALORE NUMERICO DI UN
 POLINOMIO E DELLE DERIVATE

                        AUTORE:H.HAUT
REGOLE D'USO:

    1.INTRODURRE DI SEGUITO IL GRADO
      DEL POLINOMIO,I COEFFICIENTI E
      IL PUNTO DI CALCOLO

    2.SCEGLIERE IL TIPO DI CALCOLO:

          1=VALORE DEL POLINOMIO
          2=VALORE DEL POLINOMIO E DELLA
            DERIVATA PRIMA
          3=VALORE DEL POLINOMIO E
            DI TUTTE LE DERIVATE

SIMBOLOGIA:P0(X)=VALORE DEL POLINOMIO
           P1(X),P2(X),..PN(X)=VALORI
           DELLE DERIVATE

PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
GRADO DEL POLINOMIO 5


    COEF. DI X^5
                    =1
    COEF. DI X^4
                    =0
    COEF. DI X^3
                    =0
    COEF. DI X^2
                    =4
    COEF. DI X^1
                    =1
    COEF. DI X^0
                    =-2

CALCOLO NEL PUNTO X0=2

TIPO DI CALCOLO SCELTO 3
P0(2)=48        P1(2)=97
P2(2)=168       P3(2)=240
P4(2)=240       P5(2)=120

VOLETE IL CALCOLO PER UN ALTRO PUNTO?
     (S O N): N
```

tempo d'esecuzione: 1"
memoria richiesta: 3424 bytes (senza REM : 1131)

PROGRAMMA NUMERO 3

DERIVAZIONE NUMERICA DI UNA FUNZIONE DISCRETA

INTERPOLAZIONE DI NEWTON

Come l'interpolazione polinomiale di Lagrange, l'interpolazione di Newton permette di calcolare il valore assunto da una funzione f(x), definita da n + 1 coppie di valori $[x_i, y_i = f(x_i)]$, in un punto qualsiasi.

Questo metodo di interpolazione è senza dubbio più efficace del precedente in quanto permette di calcolare direttamente sia il valore assunto dalla funzione sia quello assunto dalle sue prime n derivate in un punto a piacere.

1 — METODO NUMERICO

1.1 — Polinomio interpolatore di Newton

Il polinomio interpolatore di Newton, passante per gli n + 1 punti $[x_i, y_i = f(x_i)]$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ è il polinomio (di grado minore o uguale a n):

$$P_0(x) = D_n + D_{n-1}(x - x_n) + D_{n-2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots$$
$$+ D_0(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_0)$$

ove i D_i rappresentano le "differenze divise" definite nel modo seguente:

$$D_n = [x_n] = f(x_n)$$

$$D_{n-1} = [x_n, x_{n-1}] = \frac{[x_n] - [x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}$$

(1) $$D_{n-2} = [x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{[x_n, x_{n-1}] - [x_{n-1}, x_{n-2}]}{x_n - x_{n-2}}$$

$$D_0 \quad [x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0] = \frac{[x_n, \ldots, x_1] - [x_{n-1}, \ldots x_0]}{x_n - x_0}$$

Il valore del polinomio $P_0(x)$ per $x = t$ può essere allora calcolato con l'algoritmo di Horner (cfr programma numero 2) nel modo seguente:

(2) $$a_0 = D_0$$
$$a_1 = a_0(t - x_1) + D_1$$

$$P_0(t) = a_n = a_{n-1}(t - x_n) + D_n$$

ove $a_0, \ldots, a_n$ rappresentano i coefficienti di Horner di $P_0(x)$. In effetti il polinomio $P_0(x)$ può anche essere scritto nella forma:

$$P_0(x) = [\ldots [[D_0(x - x_1) + D_1] (x - x_2) + D_2] (x - x_3) + \ldots] (x - x_n) + D_n$$

1.2 — Derivazioni successive

Definiti i polinomi $P_k(x)$ di grado n—k tramite la formula di ricorrenza:

$$P_k(x) = (x - t) P_{k+1}(x) + P_k(t) \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

si può dimostrare che:

a) la derivata di ordine k di $P_0(x)$ calcolata in $x = t$ è data da:

$$p^{(k)}(t) = K! P_k(t)$$

b) le differenze divise di $P_k(x)$ sono i numeri di Horner di $P_{k-1}(x)$.

Riferimenti bibliografici: B1, B2, C2, C3, H1, L3, S2.

2 — TECNICA DI PROGRAMMAZIONE

2.1 — Calcolo dei D_j

I valori iniziali x_i e y_i sono, come al solito, memorizzati nei vettori X(I) ed Y(I).

Il calcolo dei D_j si effettua con l'aiuto di un vettore D(J) che viene inizializzato ponendo D(J) = Y(J).

Si procede poi in n passaggi distinti (I = 1, 2, ..., N). Ad ogni passaggio si effettua per N−I+1 volte l'istruzione:

$$D(J) = \frac{D(J+1) - D(J)}{X(J+1) - X(J)} \quad (J = 1, \ldots, N-1)$$

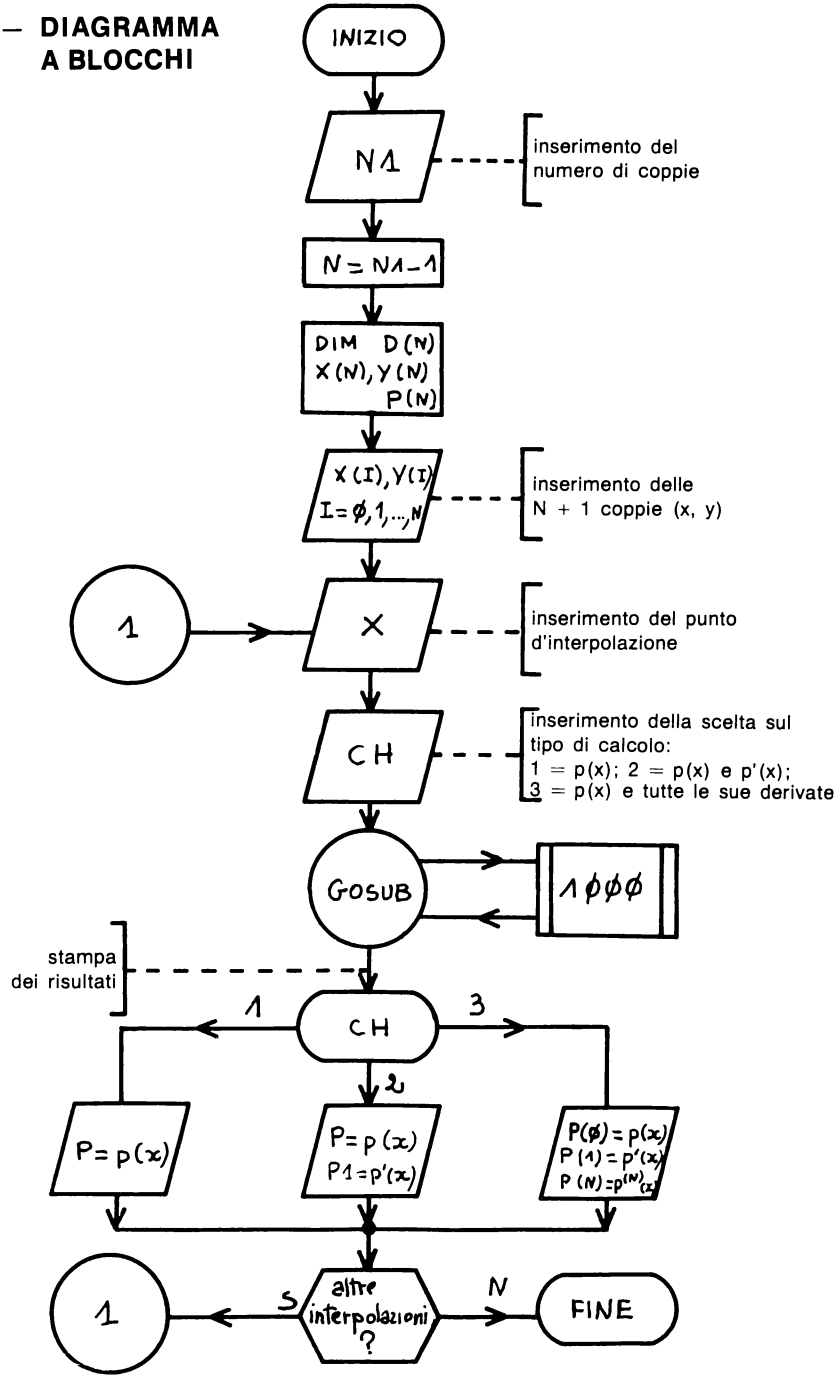
si ottengono così le N + 1 differenze divise come illustrato nello schema seguente

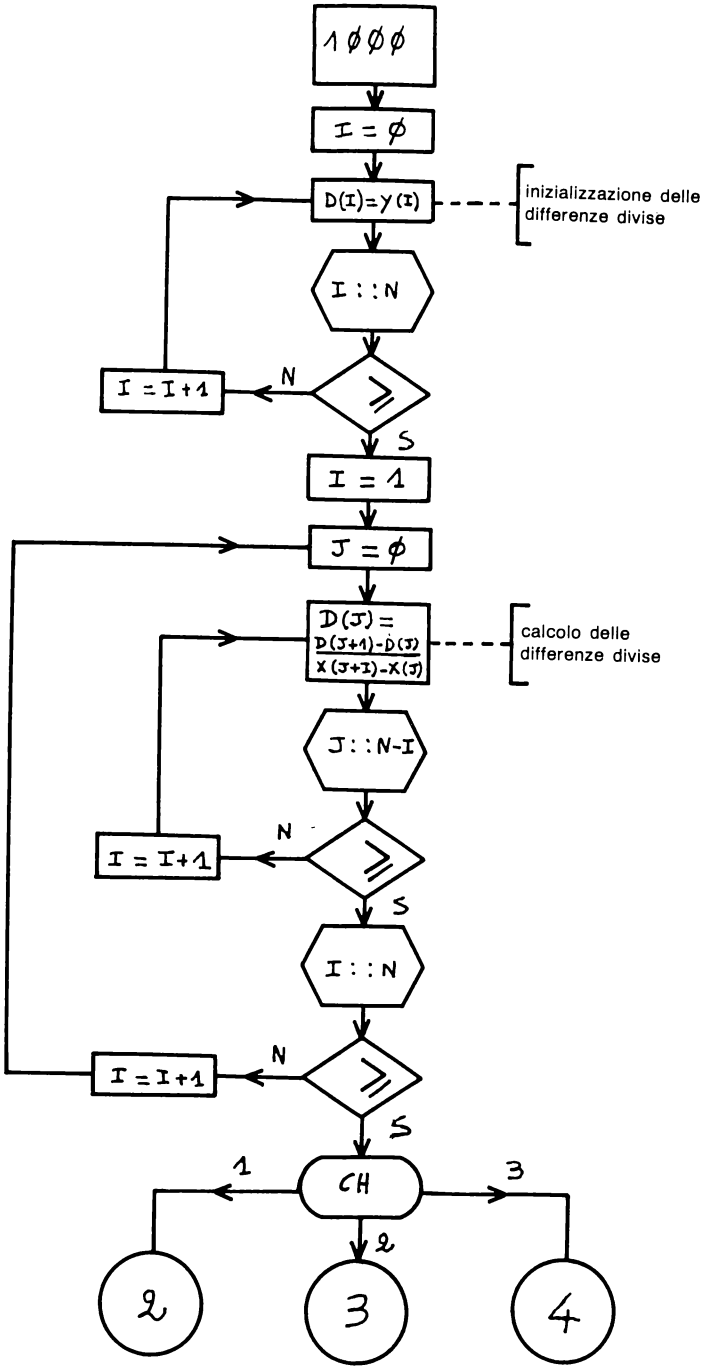
	inizializzazione	I = 1	I = 2		I = N − 1	I = N
D(0) =	$[x_0]$	$[x_1, x_0]$	$[x_2, x_1, x_0]$	...	$[x_{n-1}, \ldots, x_0]$	$[x_n, \ldots, x_0]$
D(1) =	$[x_1]$	$[x_2, x_1]$	$[x_3, x_2, x_1]$	...	$[x_n, \ldots, x_1]$	
D(2) =	$[x_2]$	$[x_3, x_2]$	$[x_4, x_3, x_2]$			
	.	.	.	.		
.	.	.	.	.		
D (N−2) =	$[x_{n-2}]$	$[x_{n-1}, x_{n-2}]$	$[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$			
D (N−1) =	$[x_{n-1}]$	$[x_n, x_{n-1}]$				
D (N) =	$[x_n]$					

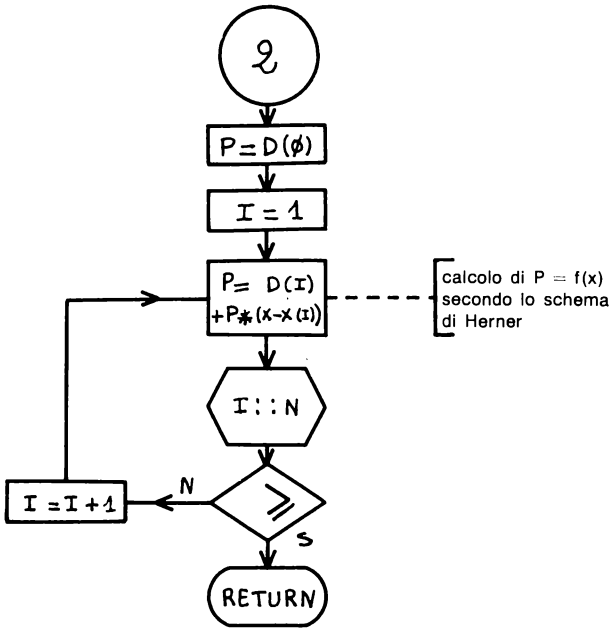
2.2 — Calcolo delle derivate

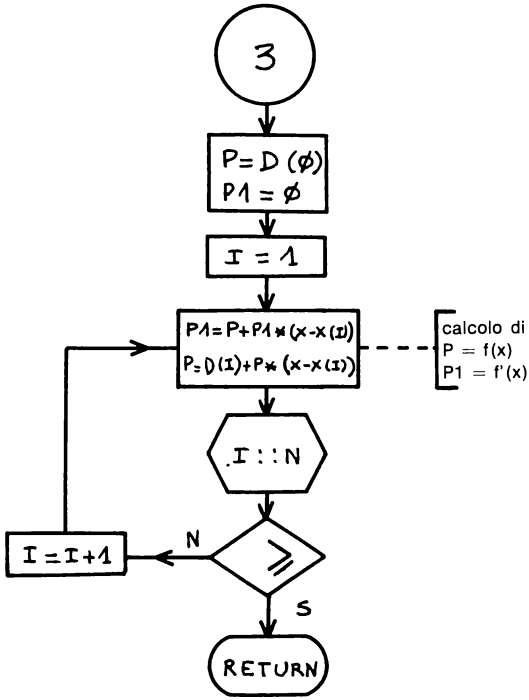
Per il calcolo delle derivate si segue un procedimento analogo a quello illustrato nel capitolo precedente (cfr paragrafo 2.3).

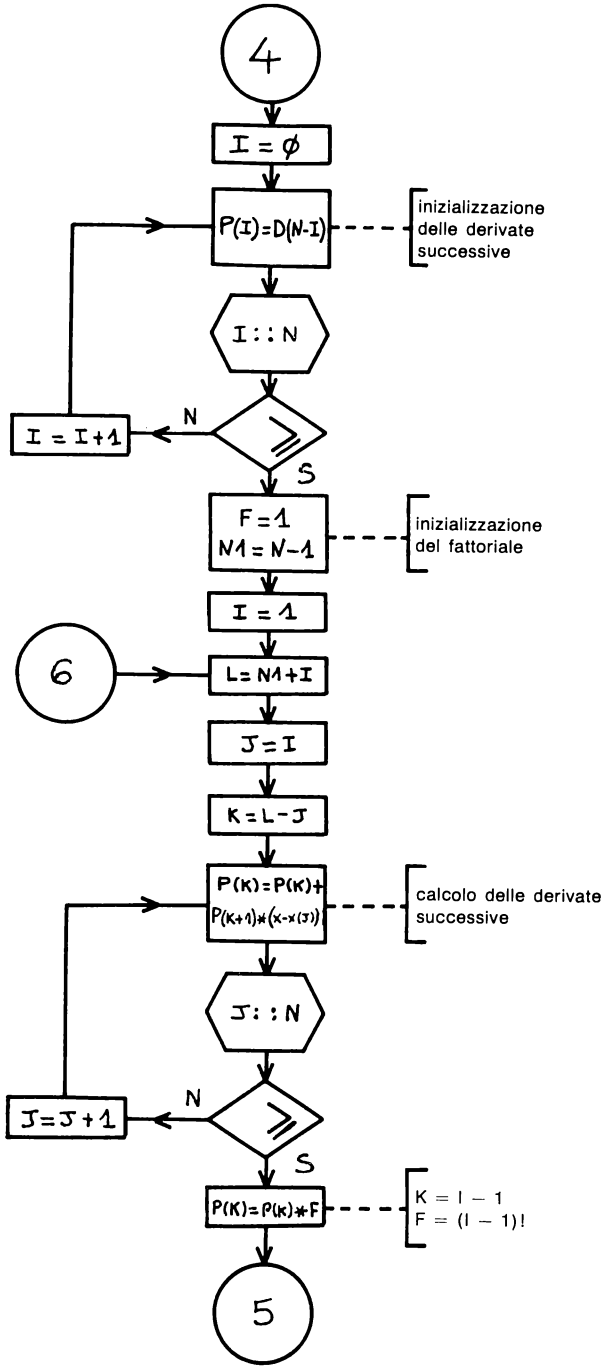
3 — DIAGRAMMA A BLOCCHI

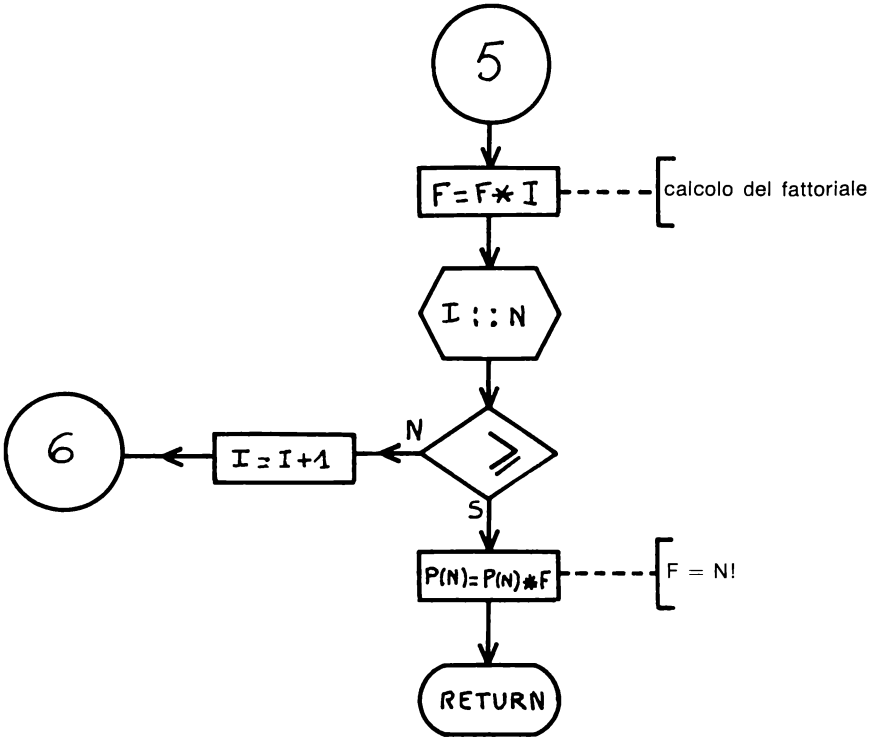



1000
I = 0
D(I)=Y(I)
inizializzazione delle differenze divise
I : : N
N
I = I+1
S
I = 1
J = 0
D(J) = (D(J+1)-D(J)) / (X(J+I)-X(J))
calcolo delle differenze divise
J : : N-I
N
I = I+1
S
I : : N
N
I = I+1
S
CH
1
2
3
2
3
4


2
P=D(Ø)
I=1
P= D(I)
+P*(X-X(I))
calcolo di P = f(x)
secondo lo schema
di Herner
I::N
N
I=I+1
S
RETURN


3
P=D(Ø)
P1=Ø
I=1
P1=P+P1*(X-X(I))
P=D(I)+P*(X-X(I))
calcolo di
P = f(x)
P1 = f'(x)
I::N
N
I=I+1
S
RETURN


4
I = ϕ
P(I)=D(N-I)
inizializzazione delle derivate successive
I : : N
N
I = I+1
S
F=1
N1=N-1
inizializzazione del fattoriale
I = 1
6
L= N1+I
J=I
K=L-J
P(K)=P(K)+
P(K+1)*(X-X(J))
calcolo delle derivate successive
J: : N
N
J=J+1
S
P(K)=P(K)*F
K = I − 1
F = (I − 1)!
5



4 — PROGRAMMA

```
1   REM     DERIVAZIONE NUMERICA DI UNA FUNZIONE DISCRETA
2   REM             INTERPOLAZIONE DI NEWTON.
3   REM
4   REM                     AUTORE:H.HAUT
5   REM
6   REM
7   REM      DESCRIZIONE:
8   REM         PARTENDO DA N+1 COPPIE (X,Y=F(X)),
9   REM         IL PROGRAMMA PERMETTE DI CALCOLARE IN
10  REM         UN PUNTO X QUALSIASI IL VALORE DI
11  REM         UNA FUNZIONE F E DI TUTTE LE SUE DERIVATE
12  REM         CON L'INTERPOLAZIONE POLINOMIALE DI NEWTON
13  REM     ******************************************
14  REM
15  REM
100  REM
110  REM
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 6);"DERIVAZIONE NUMERICA"
150  PRINT  TAB( 6);"DI UNA FUNZIONE DISCRETA:"
160  PRINT  TAB( 6);"INTERPOLAZIONE DI NEWTON"
170  PRINT : PRINT  TAB( 20);"AUTORE:H.HAUT": PRINT : PRINT
180  PRINT "REGOLE D'USO:"
```

```
190  PRINT "     1.INSERIRE IL NUMERO DI COPPIE              (X(I),Y(I)=F(X(I
     )) ).
200  PRINT "     2.INSERIRE LE COPPIE (X,Y) L'UNA            DOPO L'ALTRA "
210  PRINT "     3.DEFINIRE IL PUNTO X PER CUI               SI VUOLE L'INTER
     POLAZIONE"
220  PRINT "     4.SCEGLIERE IL TIPO DI CALCOLO:"
230  PRINT "         1=CALCOLO DI F(X)"
240  PRINT "         2-CALCOLO DI F(X) E  F'(X)"
250  PRINT "         3=CALCOLO DI F(X) E DELLE SUE              DERIVATE"
260  VTAB (23): PRINT "PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE  ": GET A$
270  HOME
280  REM
290  REM       GESTIONE DEI DATI IN INPUT
300  REM
310  INPUT "IL NUMERO DI COPPIE (X,Y)=";N1: PRINT
320 N = N1 - 1: REM    N=GRADO DEL POLINOMIO
330  REM
340  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
350  REM
360  DIM X(N),Y(N),P(N),D(N)
370  REM
380  FOR I = 0 TO N
390  PRINT "COPPIA ";I + 1;" :"
400  INPUT "           X=";X(I)
410  INPUT "           Y=";Y(I)
420  NEXT I
430  PRINT : INPUT "CALCOLO NEL PUNTO X=";X
440  PRINT : INPUT "SCELTA DEL TIPO DI CALCOLO: ";CH
450  REM
460  REM    CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
470  REM
480  GOSUB 1000
490  REM
500  REM    GESTIONE DEI RISULTATI
510  REM
520  ON CH GOTO 530,560,590
530  REM   TIPO=1
540  PRINT "F(";X;")=";P: PRINT
550  GOTO 630
560  REM   TIPO=2
570  PRINT "F(";X;")=";P: PRINT "F'(";X;")=";P1: PRINT
580  GOTO 630
590  REM   TIPO=3
600  PRINT "LE DERIVATE SUCCESSIVE DI F IN X SONO:"
610  FOR I = 0 TO N - 1 STEP 2: PRINT "F";I; TAB( 4);"=";P(I); TAB( 21);"F
     ";I + 1; TAB( 24);"=";P(I + 1): NEXT I
620  IF N = 2 *  INT (N / 2) THEN  PRINT "F";N; TAB( 4);"=";P(N)
630  REM   POSSIBILITA' D'UN ALTRO CALCOLO
640  INPUT "SI VUOLE UN'ALTRA INTERPOLAZIONE        (S O N)?:";A$
650  IF A$ = "S" THEN  GOTO 430
660  END
1000  REM   ***********************************************
1010  REM    SOTTOPROGRAMMA PER IL CALCOLO DELL'INTERPOLAZIONE
1020  REM    POLINOMIALE DI NEWTON.
1030  REM
1040  REM
1050  REM
1060  REM      1.DATI NECESSARI
1070  REM        * N=GRADO DEL POLINOMIO D'INTERPOLAZIONE
1080  REM          (=IL NUMERO DI COPPIE (X,Y) - 1 !!)
1090  REM        * X(I) E  Y(I) = VETTORI CONTENENTI
1100  REM        . LE  N+1 COPPIE (X,Y=F(X) ).
1110  REM          (I=0,1,...,N)
1120  REM        * X=PUNTO PER CUI SI VUOLE L'INTERPOLAZIONE
1130  REM        * CH =TIPO DI CALCOLO SCELTO :
1140  REM            1=CALCOLO DI F(X)
1150  REM            2=CALCOLO DI F(X) E  F'(X)
```

```
1160  REM            3=CALCOLO DI F(X) E DI TUTTE LE SUE DERIVATE
1170  REM
1180  REM      2.RISULTATI FORNITI:
1190  REM        SE CH=1, P=F(X)
1200  REM        SE CH=2: P=F(X),P1=F'(X)
1220  REM        SE CH=3,P(0)=F(X)
1230  REM                P(I) (I=1,...,N) = LE DERIVATE
1240  REM                SUCCESSIVE DI F IN X
1250  REM      3.VARIABILI UTILIZZATE:
1260  REM        F,I,J,K,L,N,N1,X
1270  REM      4.VETTORI UTILIZZATI:
1280  REM        D(N),P(N),X(N),Y(N)
1290  REM   ***********************************************
1300  REM   INIZIALIZZAZIONE DELLE DIFFERENZE DIVISE
1310  FOR I = 0 TO N
1320 D(I) = Y(I)
1330  NEXT I
1340  REM   CALCOLO DELLE DIFFERENZE DIVISE
1350  FOR I = 1 TO N
1360  FOR J = 0 TO N - I
1370 D(J) = (D(J + 1) - D(J)) / (X(J + I) - X(J))
1380  NEXT J
1390  NEXT I
1400  REM   SCELTA DEL TIPO DI CALCOLO
1410  ON CH GOTO 1420,1480,1560
1420  REM   CH=1
1430 P = D(0)
1440  FOR I = 1 TO N
1450 P = P * (X - X(I)) + D(I)
1460  NEXT I
1470  RETURN
1480  REM   CH=2
1490 P = D(0)
1500 P1 = 0
1510  FOR I = 1 TO N
1520 P1 = P1 * (X - X(I)) + P
1530 P = P * (X - X(I)) + D(I)
1540  NEXT I
1550  RETURN
1560  REM   CH=3
1570  REM   INIZIALIZZAZIONE DEI P(I)
1580  FOR I = 0 TO N
1590 P(I) = D(N - I)
1600  NEXT I
1610 F = 1: REM   INIZIALIZZAZIONE DEL FATTORIALE
1620 N1 = N - 1
1630  REM   CALCOLO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE
1640  FOR I = 1 TO N
1650 L = N1 + I
1660  FOR J = I TO N
1670 K = L - J
1680 P(K) = P(K) + P(K + 1) * (X - X(J))
1690  NEXT J
1700 P(K) = P(K) * F: REM    MOLTIPLICAZIONE PER IL FATTORIALE DI (I-1)
1710 F = F * I: REM   CALCOLO DEL FATTORIALE (F=I!)
1720  NEXT I
1730 P(N) = P(N) * F
1740  RETURN
```

5 — ESEMPIO PRATICO

Data una funzione definita tramite le 6 coppie di valori (x,y):

(0,1), (1,–1), (2,–19), (3,–35), (4,113), (5,851)

si vuole calcolare il valore della funzione e delle sue derivate per x = 6.

```
RUN
     DERIVAZIONE NUMERICA
     DI UNA FUNZIONE DISCRETA:
     INTERPOLAZIONE DI NEWTON

                    AUTORE:H.HAUT


REGOLE D'USO:
    1.INSERIRE IL NUMERO DI COPPIE
      (X(I),Y(I)=F(X(I)) ).
    2.INSERIRE LE COPPIE (X,Y) L'UNA
      DOPO L'ALTRA
    3.DEFINIRE IL PUNTO X PER CUI
      SI VUOLE L'INTERPOLAZIONE
    4.SCEGLIERE IL TIPO DI CALCOLO:
        1=CALCOLO DI F(X)
        2-CALCOLO DI F(X) E  F'(X)
        3=CALCOLO DI F(X) E DELLE SUE
          DERIVATE
PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
IL NUMERO DI COPPIE (X,Y)=6

COPPIA 1 :
           X=0
           Y=1
COPPIA 2 :
           X=1
           Y=-1
COPPIA 3 :
           X=2
           Y=-19
COPPIA 4 :
           X=3
           Y=-35
COPPIA 5 :
           X=4
           Y=113
COPPIA 6 :
           X=5
           Y=851

CALCOLO NEL PUNTO X=6

SCELTA DEL TIPO DI CALCOLO: 3
LE DERIVATE SUCCESSIVE DI F IN X SONO:
F0 =2989            F1 =3228
F2 =2662            F3 =1596
F4 =624             F5 =120
SI VUOLE UN'ALTRA INTERPOLAZIONE
(S O N)?:N
```

tempo d'esecuzione: 1"1

memoria richiesta: 4170 bytes (senza REM : 1433)

PROGRAMMA NUMERO 4

RADICI DI EQUAZIONI DI SECONDO, TERZO E QUARTO GRADO

1 — METODI NUMERICI

1.1 — Equazione di secondo grado

Le soluzioni dell'equazione $x^2 + bx + c = 0$, posto $q = \sqrt{b^2 - 4c}$, sono:

a) se $q \geq 0$ due radici reali $\quad x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{q}}{2}$

(1)

b) se $q < 0$ due radici complesse $\quad x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm i\frac{\sqrt{-q}}{2}$

1.2 — Equazione di terzo grado

Sia data l'equazione $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ (2) e sia λ il massimo dei valori assoluti dei coefficienti a_i ($\lambda = \max |a_i|$, $i = 0, 1, 2$).

Si può dimostrare che:

a) se $a_0 > 0$ esiste una radice reale negativa nell'intervallo $[-(1 + \lambda), 0]$

b) se $a_0 < 0$ esiste una radice reale positiva nell'intervallo $[0, (1 + \lambda)]$.

Si procede al calcolo di questa soluzione reale x_1 utilizzando il metodo detto della

bisezione dell'intervallo (cfr programma numero 8); in seguito dividendo le (2) per $(x - x_1)$ si trova che le altre due soluzioni sono le radici dell'equazione quadratica:

$$x^2 + (a_2 + x_1)\, x + [a_1 + (a_2 + x_1)\, x_1] = 0$$

che si risolve seguendo le regole (1).

1.3 — Equazione di quarto grado

Si voglia risolvere l'equazione:

$$(3) \qquad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Ponendo $x = y - a/4$ l'equazione (3) si scompone nelle due equazioni di secondo grado in y:

$$(4) \qquad (y^2 + 2ky + 1)\,(y^2 - 2ky + m) = 0$$

ove:

a) $$\left.\begin{aligned} l + m - 4k^2 &= q \\ 2k(m - l) &= r \\ lm &= s \end{aligned}\right\} (5) \qquad \begin{aligned} q &= b - 3a^2/8 \\ r &= c - (ab/2) + a^3/8) \\ s &= d - (ac/4) + (a^2b/16) - (3a^4/256) \end{aligned}$$

b) $k^2 = z$ è una soluzione reale dell'equazione cubica

$$(6) \qquad z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$

con $\alpha = q/2$

$$(7) \qquad \begin{aligned} \beta &= (q^2 - 4s)/16 \\ \gamma &= -r^2/64 \end{aligned}$$

Il metodo consiste dunque nel risolvere l'equazione (6) con il sistema esposto nel paragrafo 1.2, nel calcolare poi i valori di l e m risolvendo il sistema (5) e nel risolvere infine le due equazioni (4) in modo da trovare le quattro radici cercate.

Riferimenti bibliografici: B1, B3, D1, J1, W1.

2 — TECNICA DI PROGRAMMAZIONE

Si definiscono un vettore R(4), destinato a contenere le soluzioni dell'equazione ed una matrice A(4,4) contenente i coefficienti dell'equazione di grado N:

$$\sum_{I=0}^{N} A(N, I)X^I = 0 \qquad (N = 2, 3, 4)$$

Il sottoprogramma 1000 affronta il problema nella sua generalità, mentre i sottoprogrammi 2000 e 3000 risolvono rispettivamente le equazioni "normalizzate":

$$x^3 + A(3,2)\, x^2 + A(3,1)\, x + A(3,0) = 0 \text{ e } x^2 + A(2,1)\, x + A(2,0) = 0$$

Considerando risolto il problema relativo alla "ricerca di uno zero" (esposto nel capitolo 8), il programma si snoda in modo piuttosto lineare.

Vogliamo solo far risaltare che il sistema (5) viene risolto con tecniche diverse a seconda che sia uguale o diverso da zero, e precisamente:

a) se $\gamma \neq 0$, essendo anche $K^2 \neq 0$, si possono utilizzare le formule:

$$\begin{aligned} l + m &= q + 4k^2 \\ l - m &= r/2k \end{aligned} \tag{8}$$

b) se $\gamma = 0$, ne consegue che $k^2 = 0$ è una soluzione della (6) e pertanto:

1. se $q^2 - 4s \geq 0$ si ha:

$$\begin{aligned} l + m &= q \\ lm &= s \end{aligned}$$

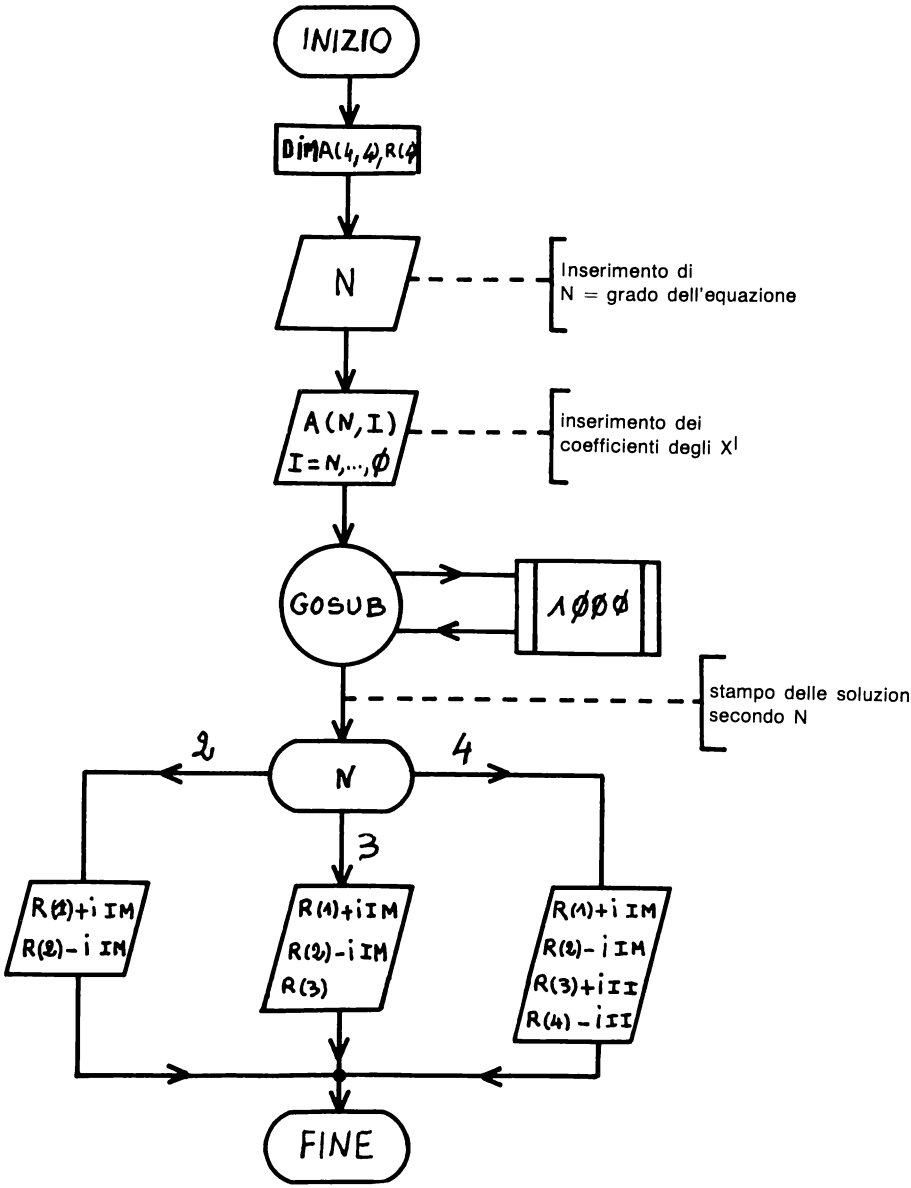
che equivale a:

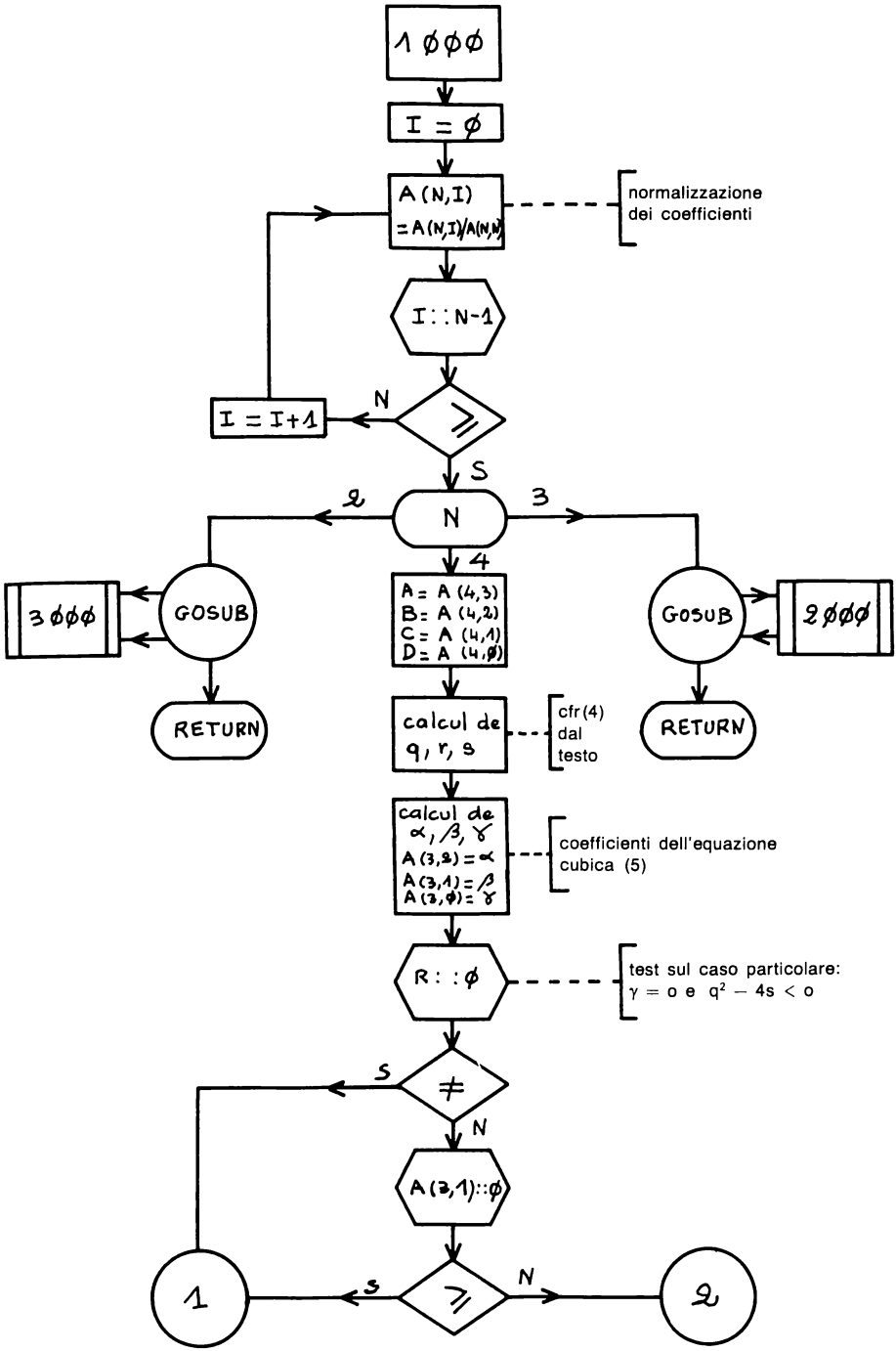
$$\begin{aligned} l + m &= q \\ l - m &= \sqrt{q^2 - 4s} \end{aligned} \tag{9}$$

2. se $q^2 - 4s < 0$ non si possono utilizzare le (9).

In questo caso però l'equazione (6) si riduce a: $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ e ammette due soluzioni reali di segno opposto (essendo $\beta < 0$). Basta allora considerare per k^2 la soluzione positiva e calcolare di conseguenza, tramite le (8), i valori di l ed m.

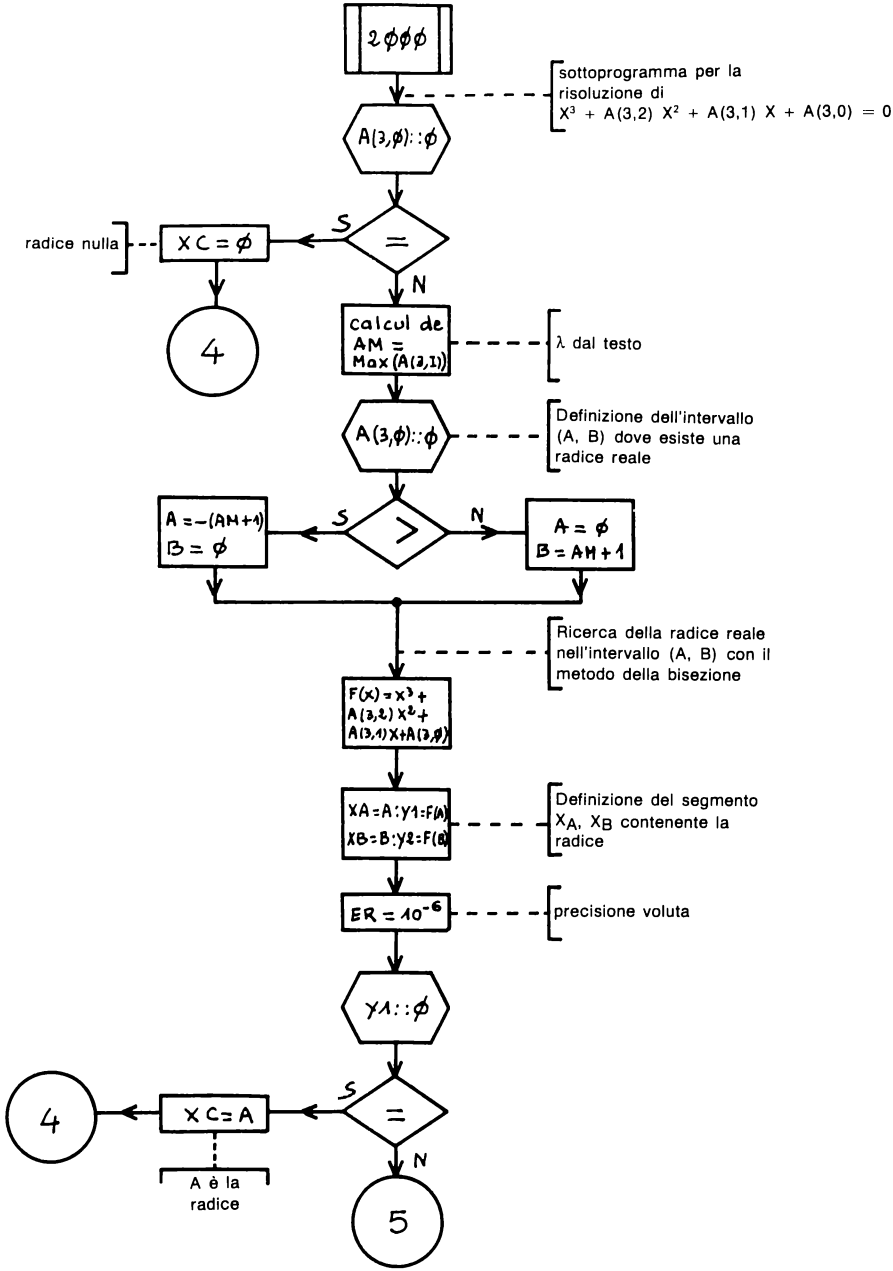
3 — DIAGRAMMA A BLOCCHI

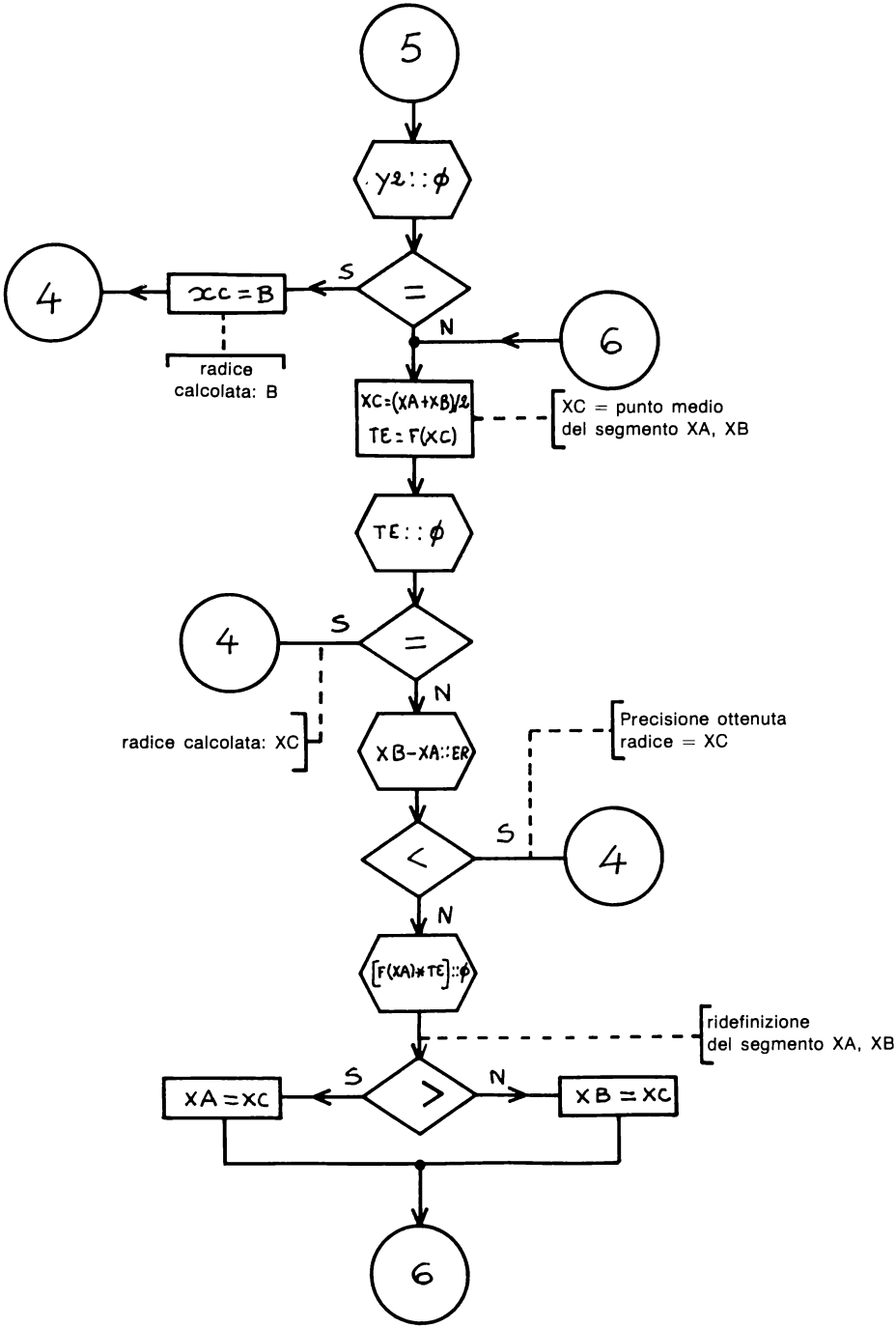


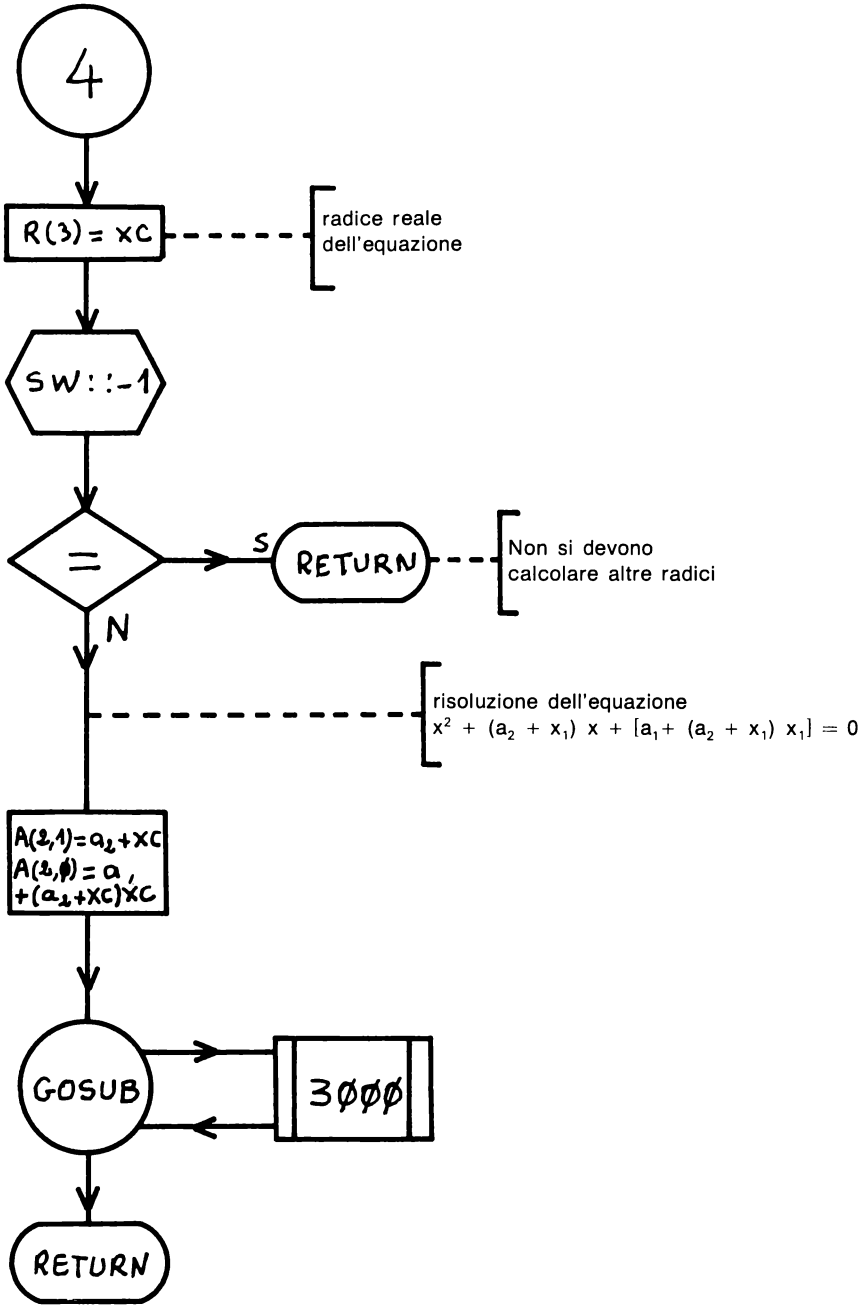

1 ØØØ
I = Ø
A (N,I)
= A(N,I)/A(N,N)
normalizzazione
dei coefficienti
I : : N-1
N
I = I+1
≥
S
2
N
3
4
3 ØØØ
GOSUB
RETURN
A = A (4,3)
B = A (4,2)
C = A (4,1)
D = A (4,Ø)
GOSUB
2 ØØØ
RETURN
calcul de
q, r, s
cfr (4)
dal
testo
calcul de
α, β, γ
A (3,2) = α
A (3,1) = β
A (3,Ø) = γ
coefficienti dell'equazione
cubica (5)
R : : Ø
test sul caso particolare:
γ = o e q² − 4s < o
S
≠
N
A (3,1) : : Ø
1
S
≥
N
2

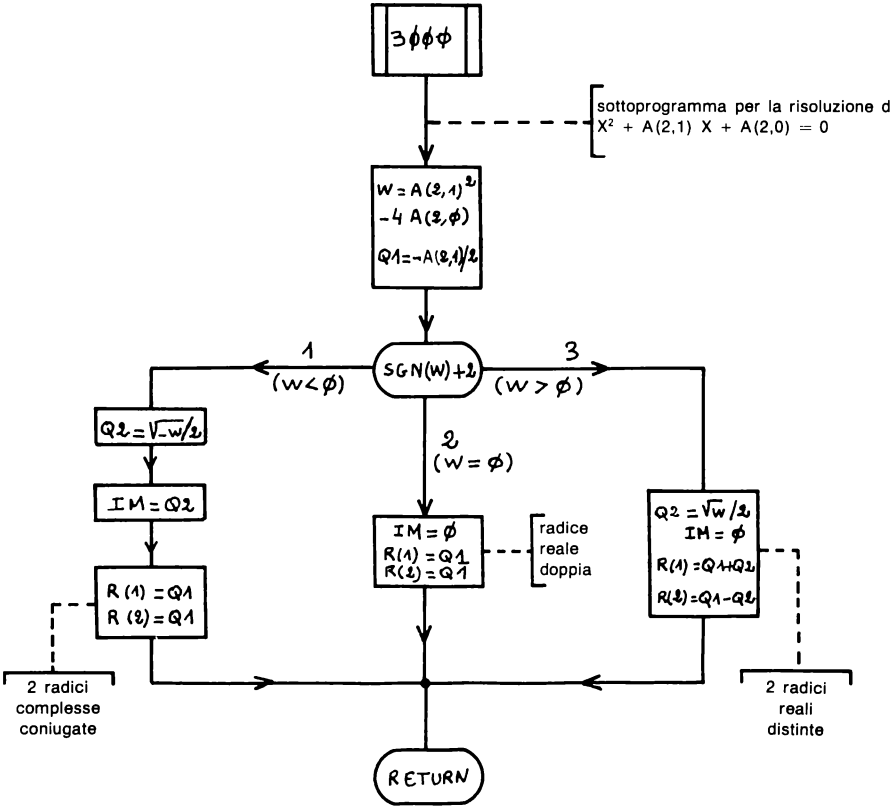
Pagina mancante

Pagina mancante


2000
sottoprogramma per la risoluzione di
X³ + A(3,2) X² + A(3,1) X + A(3,0) = 0
A(3,0)::0
S
=
N
radice nulla
XC = 0
4
calcul de AM = Max (A(3,I))
λ dal testo
A(3,0)::0
Definizione dell'intervallo (A, B) dove esiste una radice reale
A = -(AM+1)
B = 0
S
>
N
A = 0
B = AM+1
Ricerca della radice reale nell'intervallo (A, B) con il metodo della bisezione
F(X) = X³ + A(3,2) X² + A(3,1) X + A(3,0)
XA = A : Y1 = F(A)
XB = B : Y2 = F(B)
Definizione del segmento X_A, X_B contenente la radice
ER = 10⁻⁶
precisione voluta
Y1::0
S
=
N
4
XC = A
A è la radice
5


5
Y2::φ
=
S
N
4
xc=B
radice calcolata: B
6
XC=(XA+XB)/2
TE=F(XC)
XC = punto medio del segmento XA, XB
TE::φ
=
S
N
4
radice calcolata: XC
XB-XA::ER
Precisione ottenuta radice = XC
<
S
4
N
[F(XA)*TE]::φ
ridefinizione del segmento XA, XB
>
S
N
XA=XC
XB=XC
6


4
R(3) = XC
radice reale
dell'equazione
SW::-1
=
S
RETURN
Non si devono
calcolare altre radici
N
risoluzione dell'equazione
$x^2 + (a_2 + x_1)\ x + [a_1 + (a_2 + x_1)\ x_1] = 0$
A(2,1)=a2+XC
A(2,Ø)=a1
+(a2+XC)XC
GOSUB
3ØØØ
RETURN


300
sottoprogramma per la risoluzione di
X² + A(2,1) X + A(2,0) = 0
W = A(2,1)²
-4 A(2,0)
Q1=-A(2,1)/2
1
(W<0)
SGN(W)+2
3
(W>0)
2
(W=0)
Q2=√-W/2
IM=Q2
R(1)=Q1
R(2)=Q1
IM=0
R(1)=Q1
R(2)=Q1
radice
reale
doppia
Q2=√W/2
IM=0
R(1)=Q1+Q2
R(2)=Q1-Q2
2 radici
complesse
coniugate
2 radici
reali
distinte
RETURN

4 — PROGRAMMA

```
1   REM        RISOLUZIONE DI EQUAZIONI
2   REM      DI SECONDO,TERZO,QUARTO GRADO
3   REM
4   REM                  AUTORE:H.HAUT
5   REM
6   REM
7   REM      DESCRIZIONE:
8   REM       IL PROGRAMMA PERMETTE DI CALCOLARE TUTTE
9   REM       LE SOLUZIONI (EVENTUALMENTE COMPLESSE)
10  REM       DI EQUAZIONI ALGEBRICHE
11  REM       DI SECONDO,TERZO E QUARTO GRADO
12  REM  ***********************************************
13  REM
14  REM
100  REM
110  REM   REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  VTAB (3): PRINT  TAB( 7);"RISOLUZIONE DI EQUAZIONI"
150  PRINT  TAB( 7);"DI SECONDO,TERZO O QUARTO GRADO"
160  PRINT : PRINT  TAB( 20);"AUTORE:H.HAUT"
170  VTAB (7): PRINT "REGOLE D'USO: ": PRINT
180  PRINT "    1.INTRODURRE IL GRADO DELL'EQUAZIONE"
190  PRINT "    2.INTRODURRE I COEFFICIENTI                PARTENDO DA QUEL
     LO DELLA PIU'            ALTA POTENZA DI X": PRINT
200  PRINT "    3.LE SOLUZIONI SONO DATE SOTTO             LA FORMA:
                              (PARTE REALE) + I (PARTE IMMA-          GINAR
     IA)"
210  VTAB (22): PRINT "PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE": GET A$
220  REM
230  HOME
240  REM
250  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
260  REM
270  DIM A(4,4),R(4)
280  REM
290  REM   GESTIONE DEI DATI IN INPUT
300  REM
310  INPUT "QUALE E' IL GRADO DELL'EQUAZIONE? ";N: PRINT
320  FOR I = N TO 0 STEP  - 1
330  HTAB (5): PRINT "COEFFICIENTE DI X^";I;
350  INPUT "=";A(N,I)
360  NEXT I
370  PRINT : PRINT
380  REM
390  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
400  REM
410  GOSUB 1000
420  REM
430  REM   GESTIONE DEI RISULTATI
440  REM
450  ON N - 1 GOTO 470,520,580
460  REM
470  REM   EQUAZIONE DI SECONDO GRADO
480  REM
490  IF IM = 0 THEN  PRINT "RADICE 1=";R(1): PRINT "RADICE 2=";R(2): END
500  PRINT "RADICE 1=";R(1);"   +I  ";IM: PRINT "RADICE 2=";R(2);"   -I  "
     ;IM: END
510  REM
520  REM   EQUAZIONE DI TERZO GRADO
530  REM
540  PRINT "RADICE 1=";R(3)
550  IF IM = 0 THEN  PRINT "RADICE 2=";R(1): PRINT "RADICE 3=";R(2): END
```

```
560  PRINT "RADICE 2=";R(1);"   +I  ";IM: PRINT "RADICE 3=";R(2);"   -I  "
     ;IM: END
570  REM
580  REM   EQUAZIONE DI QUARTO GRADO
590  REM
600  IF IM = 0 THEN  PRINT "RADICE 1=";R(1): PRINT "RADICE 2=";R(2): GOTO
     620
610  PRINT "RADICE 1=";R(1);"   +I  ";IM: PRINT "RADICE 2=";R(2);"   -I  "
     ;IM
620  IF II = 0 THEN  PRINT "RADICE 3=";R(3): PRINT "RADICE 4=";R(4): END
630  PRINT "RADICE 3=";R(3);"   +I  ";II: PRINT "RADICE 4=";R(4);"   -I  "
     ;II
640  END

1000  REM  ***********************************************
1010  REM   SOTTOPROGRAMMA PER IL CALCOLO DELLE
1020  REM   RADICI DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO,TERZO
1025  REM   O QUARTO GRADO
1030  REM
1040  REM   REGOLE D'USO PER IL SOTTOPROGRAMMA
1050  REM
1060  REM     1.DATI NECESSARI:
1070  REM       * N=GRADO DELL'EQUAZIONE
1080  REM       * A(N,I)=COEFFICIENTI DI X^I NELLA
1090  REM         EQUAZIONE: (I=0,...,N)
1100  REM     2.RISULTATI FORNITI:
1110  REM       LE RADICI SONO DATE NELLE FORME:
1120  REM         *SE N=2:  R(1)+I IM
1130  REM                   R(2)-I IM
1140  REM         *SE N=3:  R(1)+I IM
1150  REM                   R(2)-I IM
1160  REM                   R(3)
1170  REM         *SE N=4: R(1)+I IM
1180  REM                   R(2)-I IM
1190  REM                   R(3)+I IM
1200  REM                   R(4)-I IM
1210  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
1220  REM      A,AM,AY,B,C,D,ER,I,II,IM,K,L,M
1230  REM      Q,Q1,Q2,R,S,SW,TE,TT,XA,XB,XC,Y1,Y2,W
1240  REM     4.VETTORE E MATRICE UTILIZZATI:
1250  REM      A(4,4),R(4)
1260  REM     5.FUNZIONE UTILIZZATA:
1270  REM      F(X)
1280  REM      6.SOTTOPROGRAMMI RICHIAMATI:
1290  REM      2000,3000
1300  REM
1310  REM     OSSERVAZIONE IMPORTANTE:
1320  REM       A(N,N) DEVE  ESSERE DIVERSO DA ZERO
1330  REM       (L'EQUAZIONE DEVE ESSERE VERAMENTE DI GRADO N)
1340  REM  ***********************************************
1350  REM   NORMALIZZAZIONE DEI COEFFICIENTI
1360  FOR I = 0 TO N - 1
1370 A(N,I) = A(N,I) / A(N,N)
1380  NEXT I
1390  REM   SALTO RELATIVO A N
1400  ON N - 1 GOTO 1410,1440,1480
1410  REM   EQUAZIONE DI SECONDO GRADO
1420  GOSUB 3000
1430  RETURN
1440  REM   EQUAZIONE DI TERZO GRADO
1450  GOSUB 2000
1460  RETURN
1470  REM
1480  REM   EQUAZIONE DI QUARTO GRADO
1490  REM
1500 A = A(4,3):B = A(4,2):C = A(4,1):D = A(4,0)
1510  REM
```

```
1520  REM      CALCOLO DI Q,R,S (CFR (4) NEL TESTO)
1530  REM
1540 Q = B - (3 * A * A / 8)
1550 R = C - (A * B / 2) + (A * A * A / 8)
1560 S = D - (A * C / 4) + (A * A * B / 16) - (3 * A * A * A * A / 256)
1570  REM
1580  REM   DEFINIZIONE DEI COEFFICIENTI DELL'EQUAZIONE
1600  REM   CUBICA (5) DEL TESTO
1610 A(3,2) = Q / 2
1620 A(3,1) = (Q * Q - 4 * S) / 16
1630 A(3,0) =  - (R * R / 64)
1640  REM
1650  REM   CALCOLO DI UNA RADICE REALE DELL'EQUAZIONE
1660  REM
1670  IF (R <  > 0) OR (A(3,1) >  = 0) THEN  GOTO 1760
1680  REM
1690  REM   CASO PARTICOLARE IN CUI L'EQUAZIONE (5) E' DI SECONDO GRADO
1700  REM
1710 A(2,1) = A(3,2):A(2,0) = A(3,1)
1720  GOSUB 3000: REM   RISOLUZIONE DI (5)
1730 R(3) = R(1): REM   SI PRENDE LA RADICE POSITIVA
1740  GOTO 1810
1750  REM
1760  REM    CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA 3000 CON SW=-1 PER CALCOLARE UNA
1770  REM    RADICE
1780 SW =  - 1
1790  GOSUB 2000
1800  REM
1810 K =  SQR (R(3)): REM   RADICE REALE DELL'EQUAZIONE (5)
1820  IF K = 0 THEN R =  SQR (Q * Q - 4 * S): GOTO 1880: REM   CALCOLO DI
     L-M SE K=0
1830 Q = Q + (4 * R(3)): REM  L+M
1840 R = R / (2 * K): REM  L-M
1850  REM
1860  REM   CALCOLO DI L ED M
1870  REM
1880 L = (Q - R) / 2:M = (Q + R) / 2
1890  REM
1900  REM    RISOLUZIONE DELLE 2 EQUAZ.DI 2NDO GRADO (CFR (3) NEL TESTO)
1910  REM
1920 A(2,1) = 2 * K:A(2,0) = L
1930  GOSUB 3160: REM    PRIMA EQUAZIONE
1940 R(3) = R(1) - (A(4,3) / 4):R(4) = R(2) - (A(4,3) / 4):II = IM: REM
     TRASFERIMENTO DELLA SOLUZIONE IN R(3),R(4),II
1950 A(2,1) =  - 2 * K:A(2,0) = M
1960  GOSUB 3160: REM   SECONDA EQUAZIONE
1970 R(2) = R(2) - (A(4,3) / 4):R(1) = R(1) - (A(4,3) / 4)
1980  RETURN
2000  REM  ***********************************************************
2010  REM    SOTTOPROGRAMMA PER IL CALCOLO DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE

2020  REM    X^3 + A(3,2)*X^2 + A(3,1)*X + A(3,0) = 0
2030  REM
2040  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA:
2050  REM     1.DATI NECESSARI:
2060  REM       * A(3,2),A(3,1) ED A(3,0)=COEFFICIENTI
2070  REM         DELL'EQUAZIONE
2080  REM       * SW=-1 SE SI VUOLE CALCOLARE SOLO UNA
2090  REM         RADICE REALE
2100  REM         ALTRIMENTI SW QUALSIASI
2110  REM     2.RISULTATI FORNITI:
2120  REM       *SE SW=-1,R(3)=RADICE REALE
2130  REM       *ALTRIMENTI LE RADICI DELL'EQUAZIONE SONO
2140  REM             R(1) +I IM
2150  REM             R(2) -I IM
2160  REM             R(3)
2170  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
```

```
2180  REM       A,AM,B,ER,I,IM,Q1,Q2,SW,TE,TT,W,
2190  REM       XA,XB,XC,Y1,Y2
2200  REM      4.VETTORE E MATRICE UTILIZZATI:
2210  REM       A(4,4),R(4)
2220  REM      5.FUNZIONE UTILIZZATA:
2230  REM       F(X)
2240  REM      6.SOTTOPROGRAMMA CHIAMATO:
2250  REM       3000
2260  REM  ***********************************************************
2270  IF A(3,0) = 0 THEN XC = 0: GOTO 2560: REM   IN QUESTO CASO C'E' UNA
     RADICE NULLA
2280  REM
2290  REM   RICERCA DEL COEFFICIENTE MAGGIORE IN VALORE ASSOLUTO
2300  REM
2310 AM =  ABS (A(3,0))
2320  FOR I = 1 TO 3
2330 TT =  ABS (A(3,I))
2340  IF (AM < TT) THEN AM = TT
2350  NEXT I
2360  REM
2370  REM   DEFINIZIONE DELL'INTERVALLO IN CUI C'E' UNA RADICE REALE
2380  REM
2390  IF A(3,0) > 0 THEN A =  - AM - 1:B = 0: GOTO 2440
2400 A = 0:B = AM + 1
2410  REM
2420  REM    RICERCA DELLA RADICE REALE XC NELL'INTERVALLO A,B:
2425  REM    METODO DELLA BISEZIONE
2430  REM
2440  DEF  FN F(X) = X * X * X + A(3,2) * X * X + A(3,1) * X + A(3,0)
2450  REM  DEFINIZIONE DELL'INTERVALLO IN CUI C'E' LA RADICE:XA,XB
2460 XA = A:XB = B:Y1 =  FN F(A):Y2 =  FN F(B)
2470 ER = 1E - 6: REM   PRECISIONE VOLUTA
2480  IF Y1 = 0 THEN XC = A: GOTO 2560: REM   RADICE TROVATA
2490  IF Y2 = 0 THEN XC = B: GOTO 2560: REM   RADICE TROVATA
2500 XC = (XA + XB) / 2:TE =  FN F(XC): REM   XC=PUNTO MEDIO DI XA,XB
2505  IF TE = 0 THEN  GOTO 2560
2510  IF (XB - XA) < ER THEN  GOTO 2560:
2511  REM  SE L'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO E'
2515  REM   MINORE DELLA PRECISIONE RICHIESTA, XC E' LA RADICE CERCATA
2516  REM
2520  REM  DEFINIZIONE DEL NUOVO INTERVALLO E PROSECUZIONE DELLA RICERCA
2530  IF ( FN F(XA) * TE) > 0 THEN XA = XC: GOTO 2500
2540 XB = XC: GOTO 2500
2550  REM
2560 R(3) = XC: REM   R(3)=RADICE REALE
2570  REM
2580  IF SW =  - 1 THEN  RETURN : REM   SI CALCOLA SOLO LA RADICE REALE
2590  REM
2600  REM   CALCOLO DELLE RADICI DELL'EQUAZIONE QUADRATICA (2) DEL TESTO
2610  REM
2620  REM   DEFINIZIONE DEI COEFFICIENTI
2630 A(2,1) = A(3,2) + XC
2640 A(2,0) = A(3,1) + A(3,2) * XC + XC * XC
2650  GOSUB 3000: REM   CALCOLO DELLE RADICI
2660  RETURN
3000  REM  *******************************************************
3010  REM   SOTTOPROGRAMMA PER IL CALCOLO DELLE RADICI DELL'EQUAZIONE:
3020  REM     X^2 + A(2,1)*X + A(2,0) = 0
3030  REM
3040  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
3050  REM     1.DATI NECESSARI
3060  REM        * A(2,1) ED A(2,0) = COEFFICIENTI DELL'EQUAZIONE
3080  REM     2.RISULTATI FORNITI
3090  REM        LE RADICI SONO:R(1)+I IM
3100  REM                       R(2)-I IM
3110  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE
3120  REM      IM,Q1,Q2,W
```

```
3130  REM      4.VETTORE E MATRICE UTILIZZATI
3140  REM       A(4,4),R(4)
3150  REM  ******************************************************
3160 W = A(2,1) * A(2,1) - 4 * A(2,0): REM  W=DISCRIMINANTE DELL'EQUAZIONE

3170 Q1 =  - A(2,1) / 2
3180  REM   CONTROLLO SUL SEGNO DI W
3190  ON ( SGN (W) + 2) GOTO 3210,3280,3340
3200  REM
3210  REM  W<0
3220  REM
3230 Q2 =  SQR ( - W) / 2
3240 IM = Q2: REM   PARTE IMMAGINARIA
3250 R(1) = Q1:R(2) = Q1: REM    PARTI REALI
3260  RETURN
3270  REM
3280  REM  W=0
3290  REM
3300 R(1) = Q1:R(2) = Q1: REM   RADICE REALE DOPPIA
3310 IM = 0
3320  RETURN
3330  REM
3340  REM  W>0
3350  REM
3360 Q2 =  SQR (W) / 2
3370 IM = 0: REM   DUE RADICI REALI
3380 R(1) = Q1 + Q2
3390 R(2) = Q1 - Q2
3400  RETURN
```

5 — ESEMPIO PRATICO

Calcolare le soluzioni dell'equazione $x^4 + 4x^2 - 3x + 3 = 0$

```
 RUN
      RISOLUZIONE DI EQUAZIONI
      DI SECONDO,TERZO O QUARTO GRADO

                    AUTORE:H.HAUT
REGOLE D'USO:

    1.INTRODURRE IL GRADO DELL'EQUAZIONE

    2.INTRODURRE I COEFFICIENTI
      PARTENDO DA QUELLO DELLA PIU'
      ALTA POTENZA DI X

    3.LE SOLUZIONI SONO DATE SOTTO
      LA FORMA:
      (PARTE REALE) + I (PARTE IMMA-
      GINARIA)
PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
QUALE E' IL GRADO DELL'EQUAZIONE? 4

    COEFFICIENTE DI X^4=1
    COEFFICIENTE DI X^3=0
    COEFFICIENTE DI X^2=4
    COEFFICIENTE DI X^1=3
    COEFFICIENTE DI X^0=-3


RADICE 1=.271822931    +I  2.19841689
RADICE 2=.271822931    -I  2.19841689
RADICE 3=.555982246
RADICE 4=-1.09962811

?
```

```
RUN
     RISOLUZIONE DI EQUAZIONI
     DI SECONDO,TERZO O QUARTO GRADO

                    AUTORE:H.HAUT
REGOLE D'USO:

    1.INTRODURRE IL GRADO DELL'EQUAZIONE

    2.INTRODURRE I COEFFICIENTI
      PARTENDO DA QUELLO DELLA PIU'
      ALTA POTENZA DI X

    3.LE SOLUZIONI SONO DATE SOTTO
      LA FORMA:
      (PARTE REALE) + I (PARTE IMMA-
      GINARIA)
PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
QUALE E' IL GRADO DELL'EQUAZIONE? 4

    COEFFICIENTE DI X^4=1
    COEFFICIENTE DI X^3=0
    COEFFICIENTE DI X^2=4
    COEFFICIENTE DI X^1=-3
    COEFFICIENTE DI X^0=3

RADICE 1=.449702657   +I  .731070323
RADICE 2=.449702657   -I  .731070323
RADICE 3=-.449702657   +I  1.96723185
RADICE 4=-.449702657   -I  1.96723185
```

tempo d'esecuzione: 3''5
memoria richiesta: 8286 bytes (senza REM : 2373)

PROGRAMMA NUMERO 5

INTEGRAZIONE NUMERICA

Il programma realizzato permette di scegliere tra cinque diversi metodi numerici di integrazione. I primi quattro permettono di integrare una funzione definita in un intervallo finito mentre il quinto permette di effettuare l'integrazione su un dominio il cui estremo superiore sia infinito.

1 — METODI NUMERICI

1.1 — Regola di Simpson con 2n intervalli

$$\int_a^b f(x)\ dx = h/3\,[\,f_0 + 4\,(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1}) + 2\,(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n-2}) + f_{2n}]$$

$$\text{ove } h = \frac{b-a}{2n} \quad \text{e } f_i = f(x_i),\ x_i = a + ih$$

1.2 — Regola di Bode (10 punti)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{5h}{299376}\,[16067\,(f_0 + f_{10}) + 106300\,(f_1 + f_9) - 48525\,(f_2 + f_8) + 272400\,(f_3 + f_7) - 260550\,(f_4 + f_6) + 213684\,(f_5 + f_5)$$

$$\text{ove } h = \frac{b-a}{10} \quad \text{e} \quad f_i = f(x_i),\ x_i = a + ih$$

1.3 — Regola di Gauss (12 punti)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{11} w_i\, f(y_i)$$

$$\text{ove } y_i = \left(\frac{b-a}{2}\right) x_i + \left(\frac{b+a}{2}\right)$$

con
$x_0 = -x_6 = .12523\ 34085$ $\quad w_0 = w_6 = .24914\ 70458$
$x_1 = -x_7 = .36783\ 14989$ $\quad w_1 = w_7 = .23349\ 25365$
$x_2 = -x_8 = .58731\ 79542$ $\quad w_2 = w_8 = .20316\ 74267$
$x_3 = -x_9 = .76990\ 26741$ $\quad w_3 = w_9 = .16007\ 83285$
$x_4 = -x_{10} = .90411\ 72563$ $\quad w_4 = w_{10} = .10693\ 93259$
$x_5 = -x_{11} = .98156\ 06342$ $\quad w_5 = w_{11} = .04717\ 53363$

1.4 — Regola di Chebyshev (9 punti)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{9} \sum_{i=0}^{8} f\left(\frac{b-a}{2}\, x_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

ove
$x_0 = 0$
$x_1 = -x_5 = .16790\ 61842$
$x_2 = -x_6 = .52876\ 17831$
$x_3 = -x_7 = .60101\ 86554$
$x_4 = -x_8 = .91158\ 93077$

1.5 — Estremo superiore infinito

Si utilizza un caso particolare della regola di Gauss (12 punti) esposto nel paragrafo 1.3. Si ha:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = 2 \sum_{i=0}^{11} \frac{w_i}{(1+x_i)^2}\, f\left(\frac{2}{1+x_i} + a - 1\right)$$

dove gli x_i ed i w_i sono definiti come nel paragrafo 1.3.

Nota: Conviene scegliere di volta in volta il metodo più conveniente. Il lettore potrà trovare a questo proposito numerose notizie nella letteratura consigliata. Una delle precauzioni da prendere consiste comunque nel verificare che la funzione integranda non presenti dei punti di discontinuità all'interno dell'intervallo di integrazione.

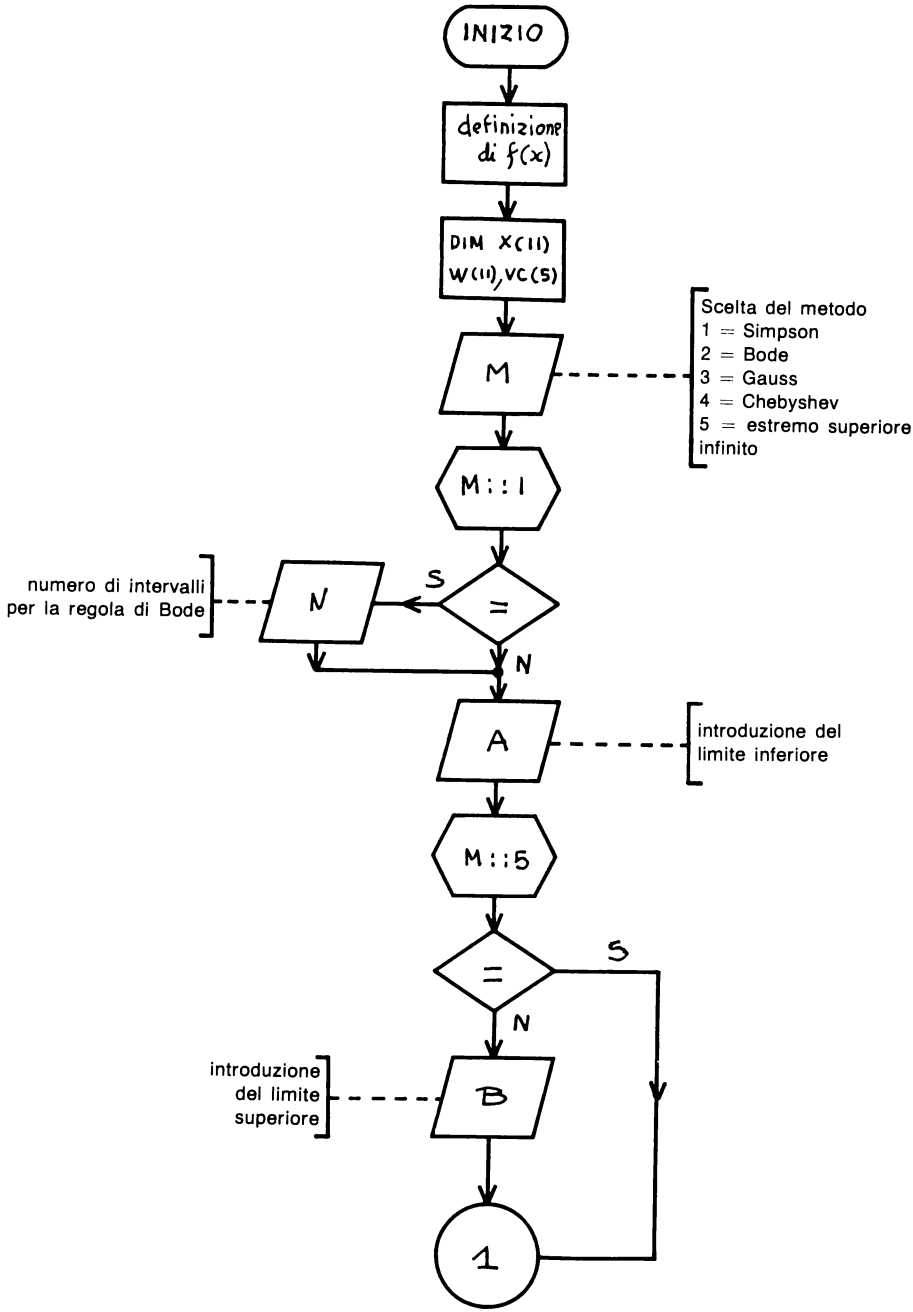
Riferimenti bibliografici: A2, B1, B2, C3, C4, H1, L1, L2, S3, S2, W1.

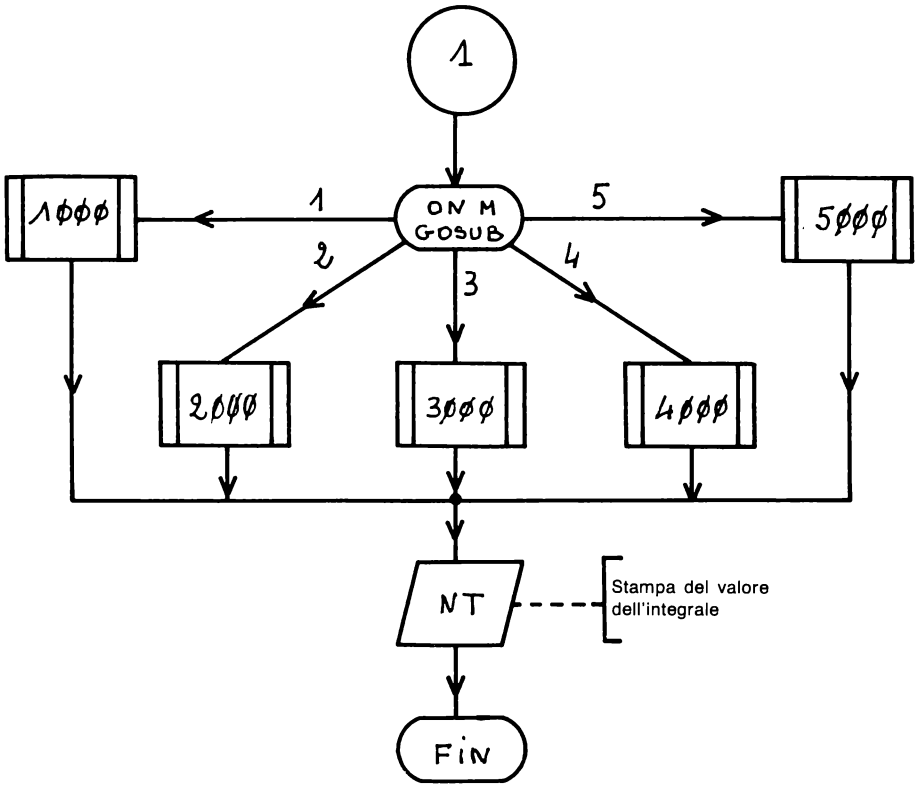
2 — TECNICA DI PROGRAMMAZIONE

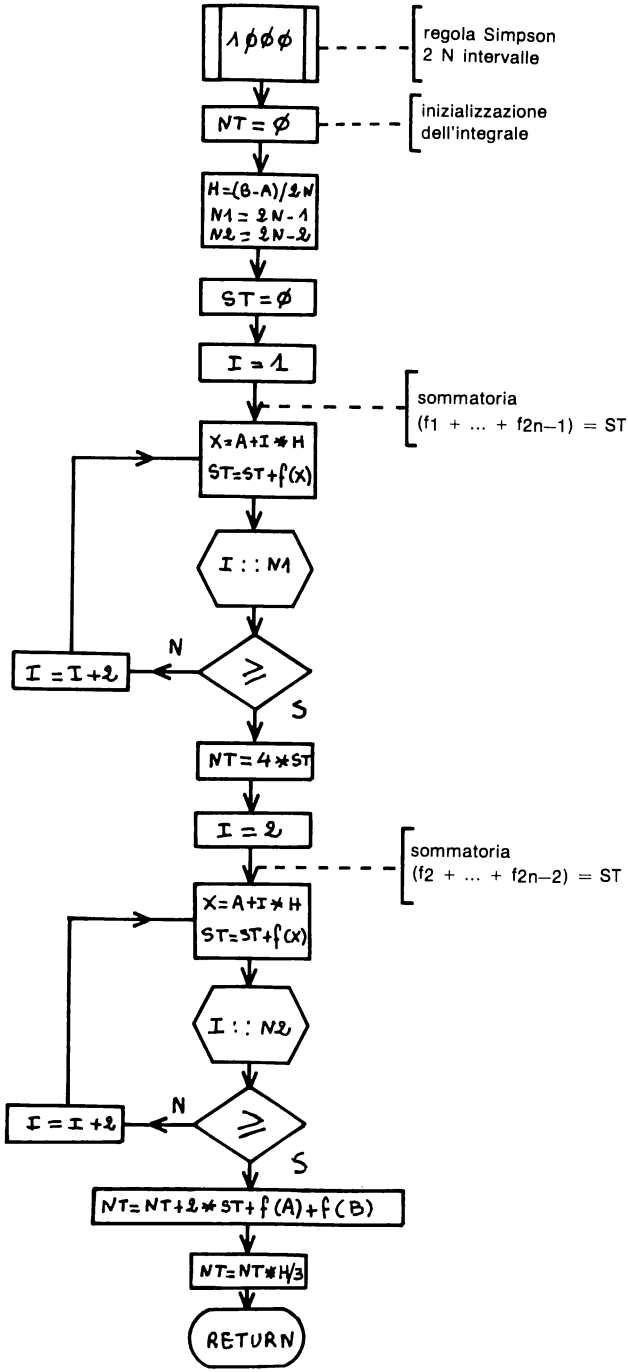
Tutti i metodi sopra citati si prestano ad una programmazione lineare che non presenta eccessive difficoltà.

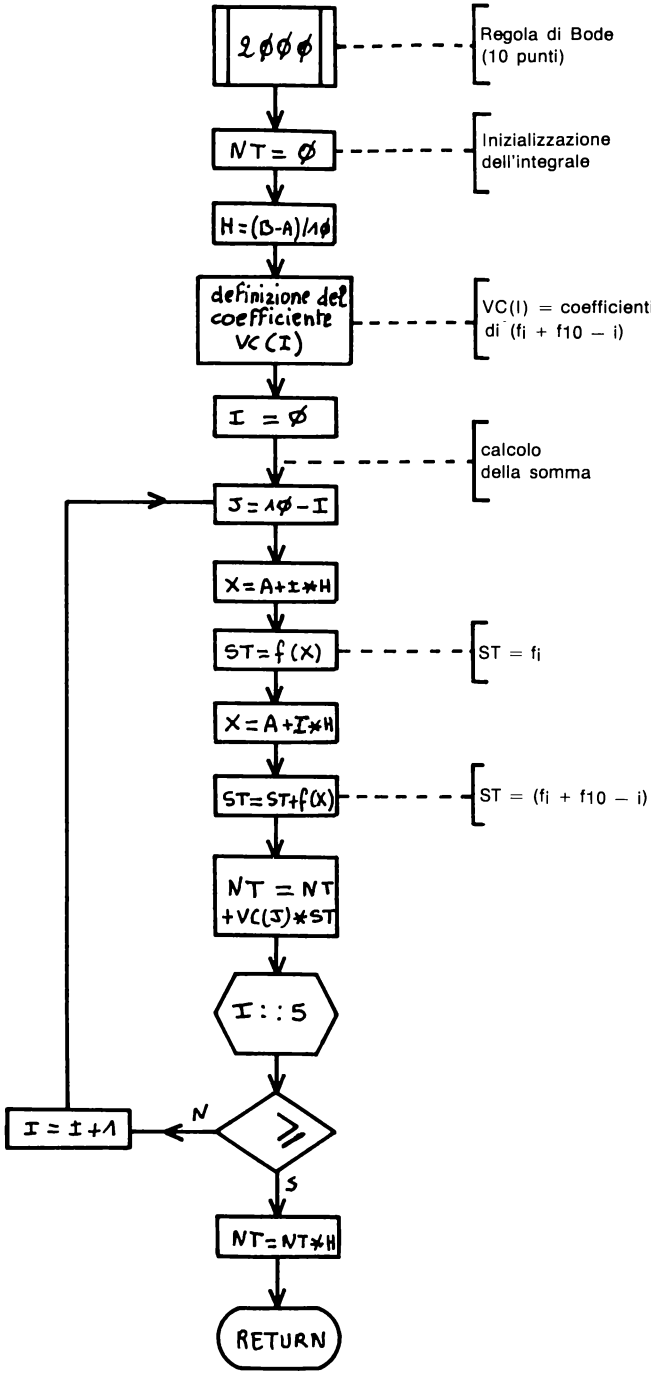
I valori x_i, w_i e le ascisse di Chebyshev sono memorizzate nei vettori X(11) e W(11); A e B rappresentano gli estremi di integrazione.

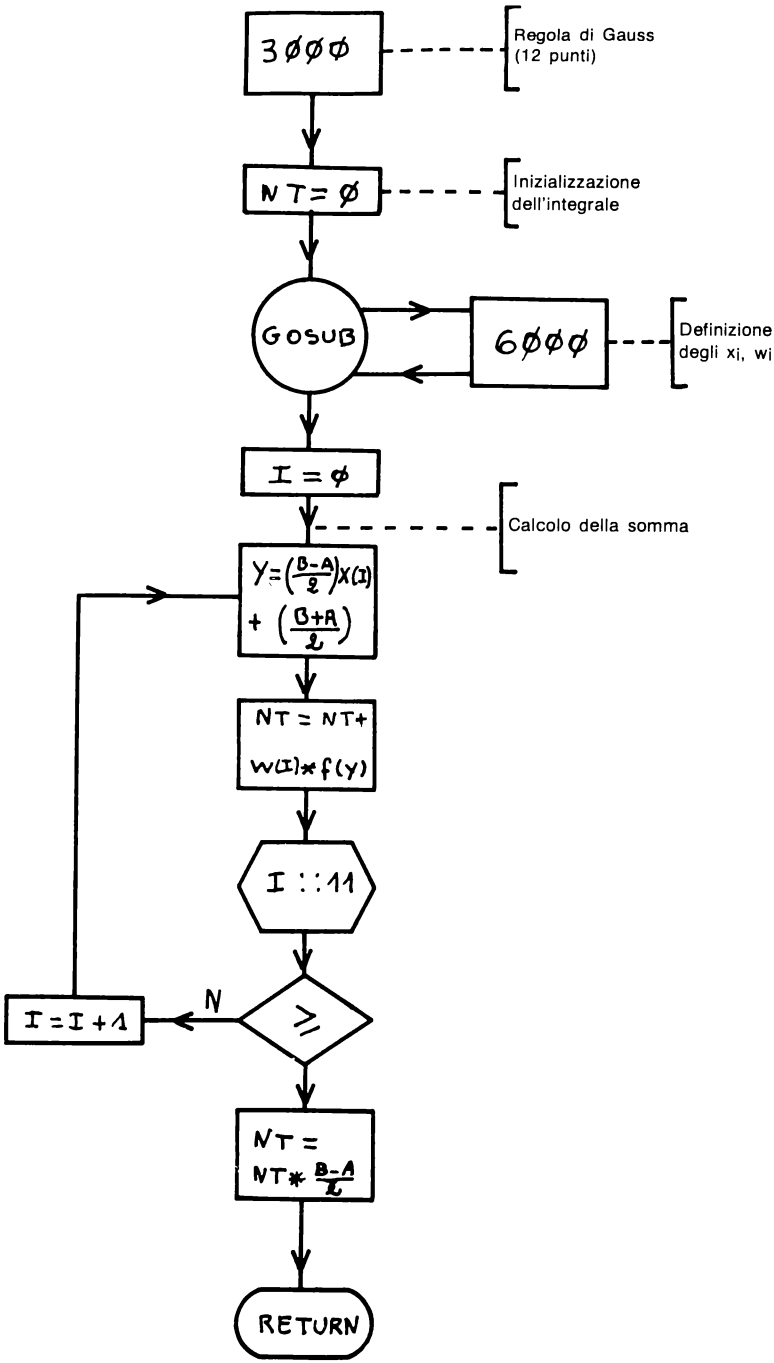
3 — DIAGRAMMA A BLOCCHI

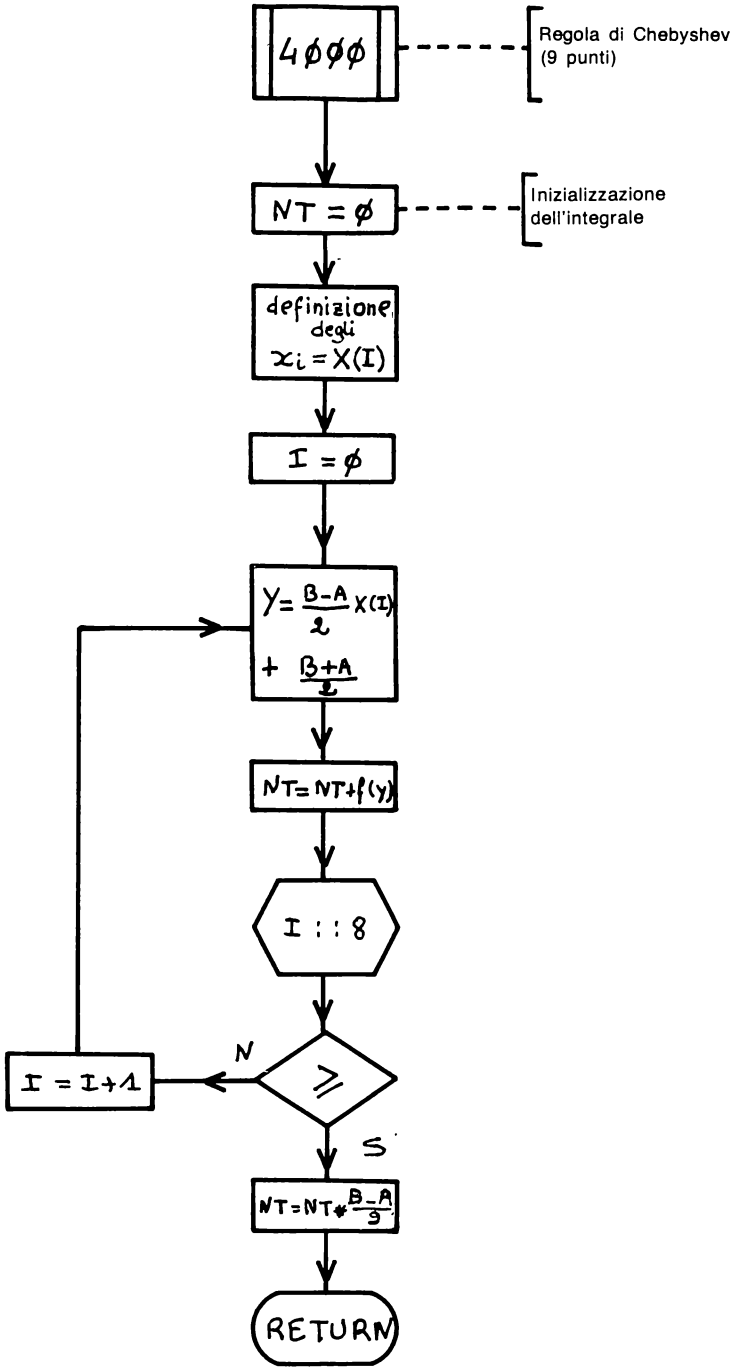


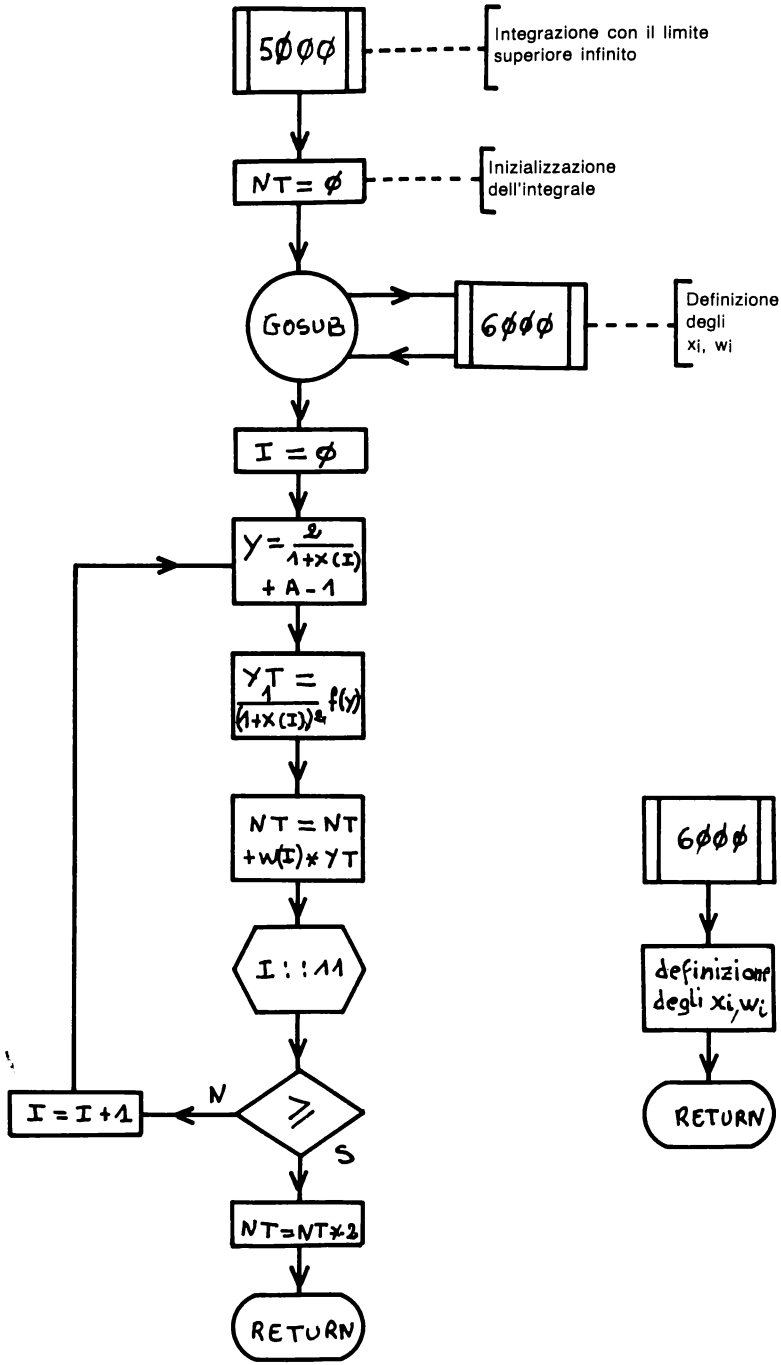

1
ON M
GOSUB
1
2
3
4
5
1000
2000
3000
4000
5000
NT
Stampa del valore
dell'integrale
FIN


1000
regola Simpson
2 N intervalle
NT = 0
inizializzazione
dell'integrale
H=(B-A)/2N
N1 = 2N-1
N2 = 2N-2
ST = 0
I = 1
sommatoria
(f1 + ... + f2n-1) = ST
X=A+I*H
ST=ST+f(X)
I : : N1
N
I = I+2
S
NT=4*ST
I = 2
sommatoria
(f2 + ... + f2n-2) = ST
X=A+I*H
ST=ST+f(X)
I : : N2
N
I = I+2
S
NT=NT+2*ST+f(A)+f(B)
NT=NT*H/3
RETURN


2000
Regola di Bode
(10 punti)
NT = 0
Inizializzazione
dell'integrale
H=(B-A)/10
definizione del
coefficiente
VC(I)
VC(I) = coefficienti
di (fi + f10 – i)
I = 0
calcolo
della somma
J=10-I
X=A+I*H
ST=f(X)
ST = fi
X=A+I*H
ST=ST+f(X)
ST = (fi + f10 – i)
NT = NT
+VC(J)*ST
I::5
N
I = I+1
S
NT=NT*H
RETURN


3ØØØ
Regola di Gauss (12 punti)
NT=Ø
Inizializzazione dell'integrale
GOSUB
6ØØØ
Definizione degli xi, wi
I=Ø
Calcolo della somma
Y=((B-A)/2)X(I) + ((B+A)/2)
NT = NT+ W(I)*f(Y)
I ::11
N
I=I+1
NT = NT*(B-A)/2
RETURN


4000
Regola di Chebyshev
(9 punti)
NT = 0
Inizializzazione
dell'integrale
definizione
degli
$x_i = X(I)$
I = 0
$Y = \frac{B-A}{2} X(I) + \frac{B+A}{2}$
NT = NT + f(y)
I : : 8
N
I = I + 1
S
$NT = NT * \frac{B-A}{3}$
RETURN


5000
Integrazione con il limite superiore infinito
NT = 0
Inizializzazione dell'integrale
GOSUB
6000
Definizione degli xi, wi
I = 0
Y = 2/(1+X(I)) + A - 1
YT = 1/((1+X(I))²) f(Y)
NT = NT + W(I) * YT
I : : 11
≥
N
S
I = I + 1
NT = NT * 2
RETURN
6000
definizione degli xi, wi
RETURN

4 — PROGRAMMA

```
1   REM       INTEGRAZIONE NUMERICA
2   REM
3   REM                 AUTORE H.HAUT
4   REM
5   REM
6   REM
7   REM        DESCRIZIONE:
8   REM            IL PROGRAMMA PROPONE CINQUE METODI DIVERSI
9   REM            PER CALCOLARE L'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE
10  REM            DEFINITA DALL'UTENTE. QUESTI METODI SONO:
11  REM             1.REGOLA DI SIMPSON
12  REM             2.REGOLA DI BODE (10 PUNTI)
13  REM             3.FORMULA DI GAUSS(12 PUNTI)
14  REM             4.FORMULA DI CHEBYSHEV(9 PUNTI)
15  REM             5.FORMULA DI GAUSS(LIMITE SUPERIORE INFINITO)
17  REM
18  REM           L'UTENTE DEVE DEFINIRE LA FUNZIONE F(X)
19  REM           ALLA LINEA 270
20  REM
21  REM
100  REM
110  REM    REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 9);"INTEGRAZIONE NUMERICA."
150  PRINT : PRINT  TAB( 20);"AUTORE:H.HAUT": PRINT
160  PRINT "REGOLE D'USO:"
170  PRINT "     1.L'UTENTE DEVE DEFINIRE LA                FUNZIONE DA INT
     EGRARE ALLA LINEA        270 COME INDICATO:                          27
     0 DEF FN F(X)=1/(1+X+X*X)
180  PRINT "       SE NON E' GIA' STATO FATTO               PREMERE RESET,
     DEFINIRE LA              FUNZIONE E LANCIARE IL PROGRAMMA"
190  PRINT "     2.SCEGLIERE POI UNO DEI METODI             SEGUENTI:
                               1=REGOLA DI SIMPSON                      2=R
     EGOLA DI BODE                          3=FORMULA DI GAUSS"
200  PRINT "        4=FORMULA DI CHEBYSHEV                    5=LIMITE SUPER
     IORE INFINITO"
210  PRINT "     3.DEFINIRE INFINE I LIMITI                 D'INTEGRAZIONE"

220  VTAB (23): PRINT "PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE  ": GET A$
230  HOME
240  REM
250  REM   DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE
260  REM
270  DEF  FN F(X) = 1 / (1 + X + X * X)
280  REM
290  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
300  REM
310  DIM X(11),W(11),VC(5)
320  REM
330  REM   GESTIONE DEI DATI IN INPUT
340  REM
350  PRINT "SCEGLIERE IL TIPO DI CALCOLO :1=SIMPSON 2=BODE;3=GAUSS;4=CHEBY
     SHEV;5=LIMITE SUP INF."
360  PRINT : INPUT "TIPO =";M
370  PRINT
380  REM
390  REM   PER LA REGOLA DI SIMPSON SI DEVE SCEGLIERE IL NUMERO DI
395  REM   INTERVALLI
400  REM
410  IF M = 1 THEN  PRINT "CALCOLO CON 2N INTERVALLI ": INPUT "   N=";N
420  INPUT "LIMITE INFERIORE =";A
430  REM
440  REM   PER IL LIMITE SUP.INFINITO, SI DEFINISCE SOLO IL LIMITE INF.
```

```
450  REM
460  IF M = 5 THEN  GOTO 480
470  INPUT "LIMITE SUPERIORE =";B
480  REM
490  REM    CHIAMATA DEI SOTTOPROGRAMMI SCELTI
500  REM
510  ON M GOSUB 1000,2000,3000,4000,5000
520  REM
530  REM   GESTIONE DEI RISULTATI
540  REM
550  PRINT : PRINT
560  PRINT "VALORE DELL'INTEGRALE=";NT
570  END
1000  REM  ***********************************************
1010  REM   SOTTOPROGRAMMA D'INTEGRAZIONE
1020  REM   REGOLA DI SIMPSON CON 2N INTERVALLI
1030  REM
1040  REM   REGOLE D'USO:
1050  REM     1.DATI NECESSARI
1060  REM       * N=NUMERO DEGLI INTERVALLI
1070  REM       * A=LIMITE INFERIORE
1080  REM       * B=LIMITE SUPERIORE
1090  REM       * F(X)=FUNZIONE DA INTEGRARE
1100  REM     2.RISULTATI FORNITI:
1110  REM        * NT=VALORE DELL'INTEGRALE
1120  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE
1130  REM      A,B,H,I,N,N1,N2,NT,ST,X
1140  REM     4.FUNZIONE UTILIZZATA
1150  REM      F(X)
1160  REM  ***********************************************
1170 NT = 0: REM   INIZIALIZZAZIONE DELL'INTEGRALE
1180 H = (B - A) / (2 * N): REM   DEFINIZIONE DEL PASSO
1190 N1 = 2 * N - 1:N2 = N1 - 1
1200  REM
1210  REM   SOMMATORIA SUI PUNTI DISPARI
1220  REM
1230 ST = 0: REM   AZZERAMENTO DELLA SOMMA PROVVISORIA
1240  FOR I = 1 TO N1 STEP 2
1250 X = A + (I * H)
1260 ST = ST +  FN F(X)
1270  NEXT I
1280 NT = ST * 4
1290  REM
1300  REM   SOMMATORIA SUI PUNTI PARI
1310  REM
1320 ST = 0: REM   RIAZZERAMENTO DELLA SOMMA PROVVISORIA
1330  FOR I = 2 TO N2 STEP 2
1340 X = A + (I * H)
1350 ST = ST +  FN F(X)
1360  NEXT I
1370  REM
1380  REM   CALCOLO DI NT
1390  REM
1400 NT = NT + 2 * ST +  FN F(A) +  FN F(B)
1410 NT = NT * H / 3
1420  RETURN
2000  REM  ***************************************************
2010  REM   SOTTOPROGRAMMA D'INTEGRAZIONE
2020  REM   REGOLA DI BODE (10 PUNTI)
2030  REM
2040  REM   REGOLE D'USO
2050  REM     1.DATI NECESSARI:
2060  REM       *A=LIMITE INFERIORE
2070  REM       *B=LIMITE SUPERIORE
2080  REM       *F(X)=FUNZIONE DA INTEGRARE
2090  REM     2.RISULTATI FORNITI:
2100  REM       *NT=VALORE DELL'INTEGRALE
```

```
2110  REM      3.VARIABILI UTILIZZATE
2120  REM       A,B,H,I,J,NT,ST,X
2130  REM      4.VETTORE UTILIZZATO
2140  REM       VC(5)
2150  REM      5.FUNZIONE UTILIZZATA
2160  REM       F(X)
2170  REM  ****************************************************
2180 NT = 0: REM   INIZIALIZZAZIONE DELL'INTEGRALE
2190 H = (B - A) / 10: REM   DEFINIZIONE DEL PASSO
2200  REM
2210  REM   DEFINIZIONE DEL VETTORE VC
2220  REM   VC(I)=COEFFICIENTE DI F(I)+F(10-I) DALLA FORMULA DEL TESTO
2230  REM
2240 VC(0) = .268341483 6:VC(1) = 1.775359414:VC(2) =  - .810435706 3:VC(3) =
     4.549462883:VC(4) =  - 4.351551227:VC(5) = 3.568823152
2250  REM
2260  REM   CALCOLO DELLA SOMMA
2270  REM
2280  FOR I = 0 TO 5
2290 J = 10 - I
2300 X = A + (I * H)
2310 ST =  FN F(X)    /
2320 X = A + (J * H)
2330 ST = ST +  FN F(X): REM   ST=F(I)+F(10-I) (CFR TESTO)
2340 NT = NT + VC(I) * ST: REM   CALCOLO DI NT
2350  NEXT I
2360 NT = NT * H
2370  RETURN
3000  REM  ****************************************************
3010  REM   SOTTOPROGRAMMA D'INTEGRAZIONE
3020  REM   FORMULA DI GAUSS (12 PUNTI)
3030  REM
3040  REM   REGOLE D'USO:
3050  REM     1.DATI NECESSARI:
3060  REM       * A=LIMITE INFERIORE
3070  REM       * B=LIMITE SUPERIORE
3080  REM       * F(X)=FUNZIONE DA INTEGRARE
3090  REM     2.RISULTATI FORNITI:
3100  REM       * NT=VALORE DELL'INTEGRALE
3110  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
3120  REM      A,B,I,NT,Y
3130  REM     4.VETTORE UTILIZZATO:
3140  REM      X(11),W(11)
3150  REM     5.FUNZIONE UTILIZZATA
3160  REM      F(X)
3170  REM     6.SOTTOPROGRAMMA CHIAMATO:
3180  REM      6000
3190  REM  ****************************************************
3200 NT = 0: REM   INIZIALIZZAZIONE DELL'INTEGRALE
3210  REM
3220  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA 3000
3230  REM   CHE DEFINISCE I PUNTI PER CALCOLARE Y(I) (CFR TESTO) E
3235  REM   I PESI W(I)
3240  REM
3250  GOSUB 6000
3260  REM
3270  REM   CALCOLO DELLA SOMMA
3280  REM
3290  FOR I = 0 TO 11
3300 Y = (B - A) * X(I) / 2:Y = Y + (B + A) / 2: REM   Y=PUNTI DI CALCOLO
     PER F
3310 NT = NT + W(I) *  FN F(Y): REM   CALCOLO DELL'INTEGRALE
3320  NEXT I
3330 NT = NT * (B - A) / 2
3570  RETURN
4000  REM  ****************************************************
4010  REM   SOTTOPROGRAMMA D'INTEGRAZIONE
```

```
4020  REM   FORMULA DI CHEBYSHEV (9 PUNTI)
4030  REM
4040  REM   REGOLE D'USO:
4050  REM     1.DATI NECESSARI:
4060  REM       * A=LIMITE INFERIORE
4070  REM       * B=LIMITE SUPERIORE
4080  REM       * F(X)=FUNZIONE DA INTEGRARE
4090  REM     2.RISULTATI FORNITI:
4100  REM       * NT=VALORE DELL'INTEGRALE
4110  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
4120  REM      A,B,I,NT,Y
4130  REM     4.VETTORE UTILIZZATO:
4140  REM      X(8)
4150  REM     5.FUNZIONE UTILIZZATA:
4160  REM      F(X)
4170  REM  ************************************************
4180 NT = 0: REM   INIZIALIZZAZIONE DELL'INTEGRALE
4190  REM
4200  REM   DEFINIZIONE DEGLI X(I) DEL TESTO
4210  REM
4220 X(0) = 0:X(1) = .1679061842:X(2) = .5287617831:X(3) = .6010186554:X(4
     ) = .9115893077:X(5) =  - X(1):X(6) =  - X(2):X(7) =  - X(3):X(8) =  -
     X(4)
4230  REM
4240  REM   CALCOLO DELLA SOMMA
4250  REM
4260  FOR I = 0 TO 8
4270 Y = (B - A) * X(I) / 2:Y = Y + (B + A) / 2: REM  DEFINIZIONE DEI PUN-
     TI IN CUI CALCOLARE F
4280 NT = NT +  FN F(Y): REM   CALCOLO DELL'INTEGRALE
4290  NEXT I
4300 NT = NT * (B - A) / 9
4310  RETURN
5000  REM  ************************************************
5010  REM   SOTTOPROGRAMMA D'INTEGRAZIONE
5020  REM   CON LIMITE SUPERIORE INFINITO
5030  REM   FORMULA DI GAUSS (12 PUNTI)
5040  REM
5050  REM   REGOLE D'USO
5060  REM     1.DATI NECESSARI:
5070  REM       * A=LIMITE INFERIORE
5080  REM       * F(X)=FUNZIONE DA INTEGRARE
5090  REM     2.RISULTATI FORNITI:
5100  REM       * NT=VALORE DELL'INTEGRALE
5110  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
5120  REM       A,I,NT,Y,YT
5130  REM     4.VETTORE UTILIZZATO:
5140  REM      X(I),W(I)
5150  REM     5.FUNZIONE UTILIZZATA:
5160  REM      F(X)
5170  REM     6.SOTTOPROGRAMMA CHIAMATO:
5180  REM      6000
5190  REM  ************************************************
5200 NT = 0: REM   INIZIALIZZAZIONE DELL'INTEGRALE
5210  REM
5220  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA CHE DEFINISCE
5230  REM   GLI X(I) E  W(I) (CFR TESTO)
5240  REM
5250  GOSUB 6000
5260  REM
5270  REM   CALCOLO DELLA SOMMA
5280  REM
5290  FOR I = 0 TO 11
5300 Y = (2 / (1 + X(I))) + A - 1: REM   PUNTI IN CUI CALCOLARE F
5310 YT =  FN F(Y)
5320 YT = YT / ((1 + X(I)) ^ 2): REM     VALORE PROVVISORIO DI UN TERMINE
     DELLA SOMMA
```

```
5330 NT = NT + W(I) * YT: REM   CALCOLO DELL'INTEGRALE
5340  NEXT I
5350 NT = NT * 2
5360  RETURN
6000  REM  ******************************************
6010  REM   SOTTOPROGRAMMA DI INIZIALIZZAZIONE DEI VETTORI
6020  REM   X(I) E  W(I) NECESSARI PER L'INTEGRAZIONE
6030  REM   SECONDO LA FORMULA DI GAUSS 12 PUNTI
6040  REM
6050  REM   SOLO GLI ELEMENTI
6060  REM      X(11) E W(11)
6070  REM   SONO UTILIZZATI
6080  REM  ******************************************
6090  REM
6100  REM   INIZIALIZZAZIONE DEGLI X(I)
6110  REM
6120 X(0) = .1252334085:X(1) = .3678314989:X(2) = .5873179542:X(3) = .7699
     026741:X(4) = .9041172563:X(5) = .9815606342
6130 X(6) =  - X(0):X(7) =  - X(1):X(8) =  - X(2):X(9) =  - X(3):X(10) =
     X(4):X(11) =  - X(5)
6140  REM
6150  REM   INIZIALIZZAZIONE DEI W(I)
6160  REM
6170 W(0) = .2491470458:W(1) = .2334925365:W(2) = .2031674267:W(3) = .1600
     783285:W(4) = .1069393259:W(5) = .0471753363
6180 W(6) = W(0):W(7) = W(1):W(8) = W(2):W(9) = W(3):W(10) = W(4):W(11) =
     W(5)
6190  RETURN
```

5 — ESEMPIO PRATICO

Si voglia calcolare l'integrale tra 0 e 1 della funzione:

$$f(x) = 1/(1 + x + x^2)$$

Il risultato esatto di tale integrale è $\pi/3\sqrt{3} = 0.604599788$.
I vari metodi proposti portano ai seguenti risultati:

1. Simpson (n = 10):	.604599557
2. Bode:	.604599787
3. Gauss:	.604599788
4. Chebyshev:	.604599734

L'esempio illustra la risoluzione con il metodo di Gauss.

```
 RUN
        INTEGRAZIONE NUMERICA.

                    AUTORE:H.HAUT

REGOLE D'USO:
     1.L'UTENTE DEVE DEFINIRE LA
       FUNZIONE DA INTEGRARE ALLA LINEA
       270 COME INDICATO:
         270 DEF FN F(X)=1/(1+X+X*X)
```

```
        SE NON E' GIA' STATO FATTO
        PREMERE RESET, DEFINIRE LA
        FUNZIONE E LANCIARE IL PROGRAMMA
      2.SCEGLIERE POI UNO DEI METODI
        SEGUENTI:
         1=REGOLA DI SIMPSON
         2=REGOLA DI BODE
         3=FORMULA DI GAUSS
         4=FORMULA DI CHEBYSHEV
         5=LIMITE SUPERIORE INFINITO
      3.DEFINIRE INFINE I LIMITI
        D'INTEGRAZIONE
PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
SCEGLIERE IL TIPO DI CALCOLO :1=SIMPSON
2=BODE;3=GAUSS;4=CHEBYSHEV;5=LIMITE SUP
INF.

TIPO =3

LIMITE INFERIORE =0
LIMITE SUPERIORE =1


VALORE DELL'INTEGRALE=.604599788
```

tempo d'esecuzione: 1"
memoria richiesta: 8186 bytes (senza REM : 2526).

PROGRAMMA NUMERO 6

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO E SECONDO ORDINE

Questo programma permette di calcolare il valore assunto da una funzione $y(x)$ in un generico punto (oppure di tabulare la funzione stessa) quando questa è definita tramite una equazione differenziale del primo o secondo ordine, con le condizioni iniziali in un punto x_0. Il metodo di risoluzione adottato è quello di Runge-Kutta (quarto ordine).

1 — METODI NUMERICI

1.1 — Equazione differenziale del primo ordine

Si voglia risolvere l'equazione:

$$(1) \qquad y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sotto la condzione iniziale $y(x_0) = y_0$, calcolando il valore di y in $x = x_f$.

Seguendo il metodo di Runge-Kutta, si divide l'intervallo $x_f - x_0$ in segmenti di lunghezza h e si tabula la funzione y da x_0 a x_f, con passo h, utilizzando il seguente algoritmo:

$$(2) \qquad y_{n+1} = y_n + 1/8\ (k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) + (\text{errore dell'ordine } h^5)$$

con la convenzione:

$$y_n = y(x_n) \qquad \text{con } x_n = x_0 + nh$$

I k_i sono dati da:

$$
(3) \quad \begin{aligned}
k_1 &= h\,f\,(x_n, y_n) \\
k_2 &= h\,f\,(x_n + h/3, y_n + k_1/3) \\
k_3 &= h\,f\,(x_n + 2h/3, y_n - k_1/3 + k_2) \\
k_4 &= h\,f\,(x_n + h, y_n + k_1 - k_2 + k_3).
\end{aligned}
$$

1.2 — Equazione differenziale del secondo ordine

Come nel caso precedente, la soluzione di:

$$
(4) \quad y''\,(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = f\,(x, y, y')
$$

sotto le condizioni iniziali:

$$
y(x_0) = y_0 \text{ e } y'(x_0) = y'_0
$$

è tabulata da x_0 ad x_f con passo h nel modo seguente:

$$
(5) \quad \begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\,[y'_n + 1/6\,(l_1 + l_2 + l_3)] \\
y'_{n+1} &= y'_n + 1/6\,(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)
\end{aligned}
$$

ove l'errore di approssimazione è dell'ordine di h^5.

Si ha:

$$
(6) \quad \begin{aligned}
l_1 &= h\,f\,(x_n, y_n, y'_n) \\
l_2 &= h\,f\,(x_n + h/2, y_n + h/2y'_n, y'_n, + l_1/2) \\
l_3 &= h\,f\,(x_n + h/2, y_n + h/2y'_n + h/4l_1, y'_n + l_2/2) \\
l_4 &= h\,f\,(x_n + h, y_n + hy'_n + h/2l_2, y'_n + l_3)
\end{aligned}
$$

Riferimenti bibliografici: A2, B1, B2, C3, H1, L1, S2, S3.

2 — TECNICA DI PROGRAMMAZIONE

Il programma realizzato permette all'utente di definire le due equazioni differenziali $y' = F1(x, y)$ e $y'' = F2(x, y, y')$, di scegliere le condizioni iniziali (x_0, y_0) e (x_0, y_0, y'_0) e di determinare il passo H da utilizzare nonché il valore $x_f = XF$.

Per calcolare il valore di y in x_f bisogna scegliere il passo H in modo tale che $x_f = x_0 + nH$ (con n intero).

Per evitare di calcolare le funzioni F1 ed F2 con dei sottoprogrammi, si possono definire nel modo seguente:

1) DEF FN F1(X) = f(X, Y)

il calcolo di C = F1(A, B) può allora essere svolto con le istruzioni:

```
Y = B
C = FN F1(A)
```

2) DEF FN F2(X) = f(x, y, z)

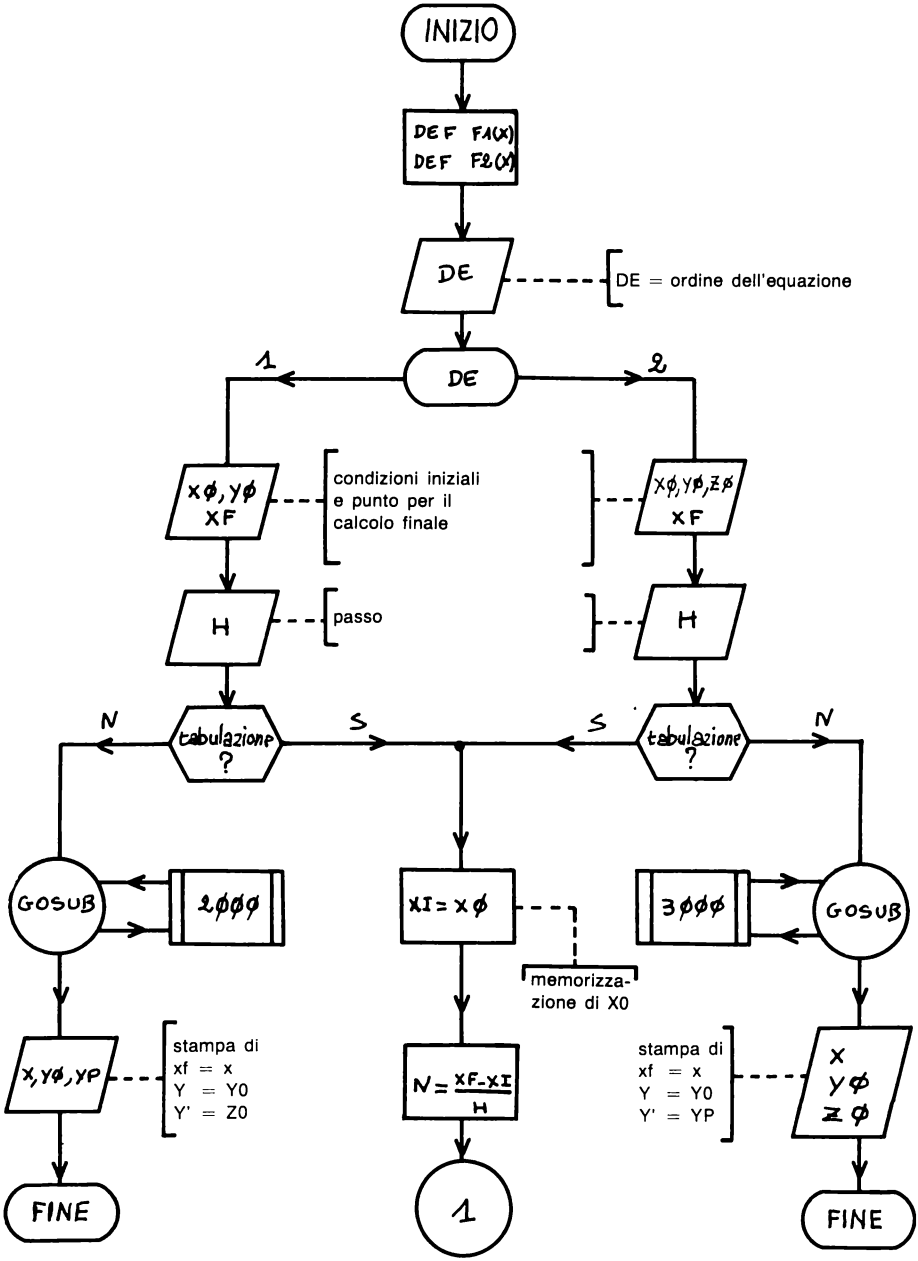
in cui z rappresenta y' e il calcolo di D = F2 (A, B, C) può essere realizzato nel modo seguente:

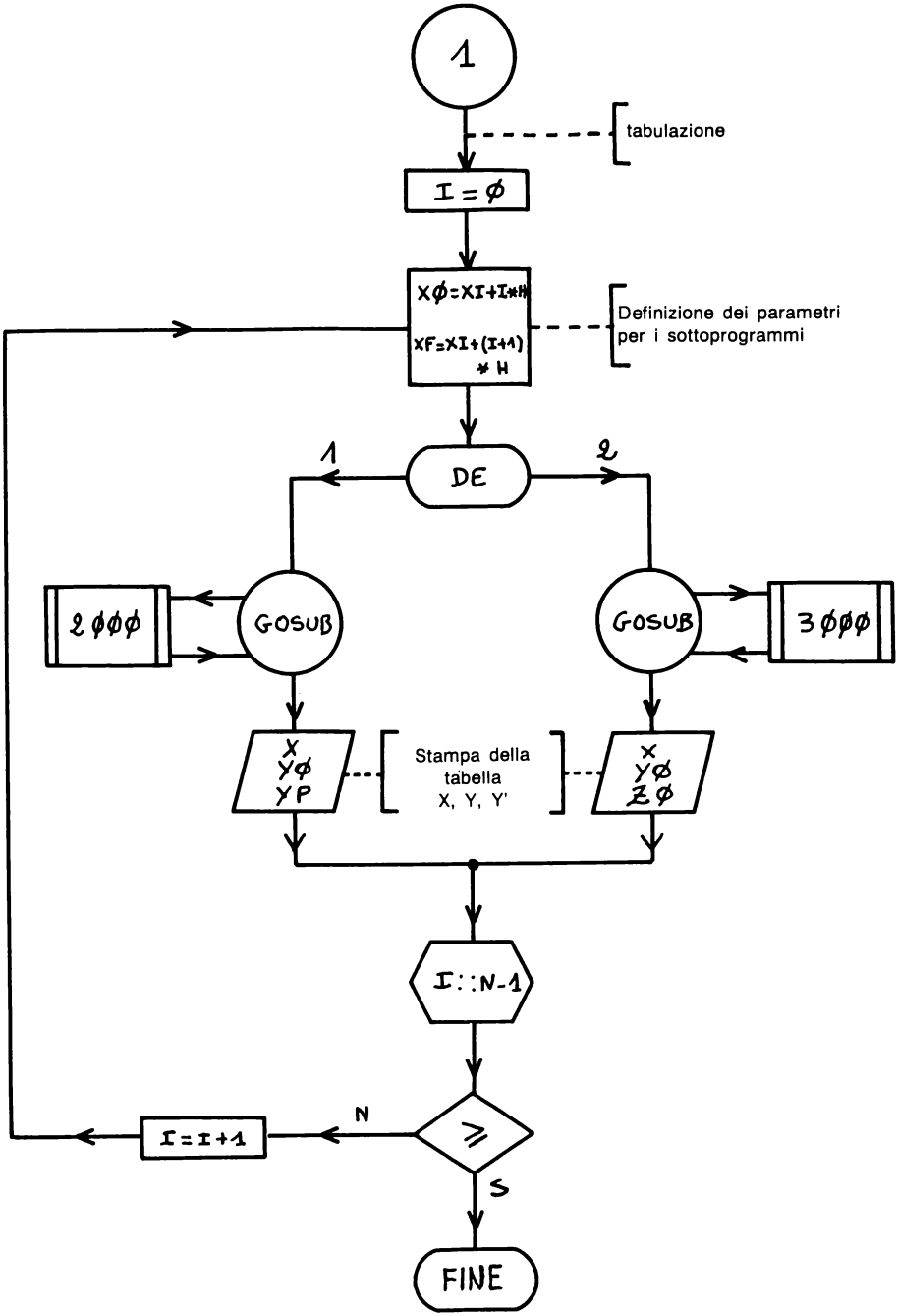
```
Y = B
Z = C
D = FN F2(A)
```

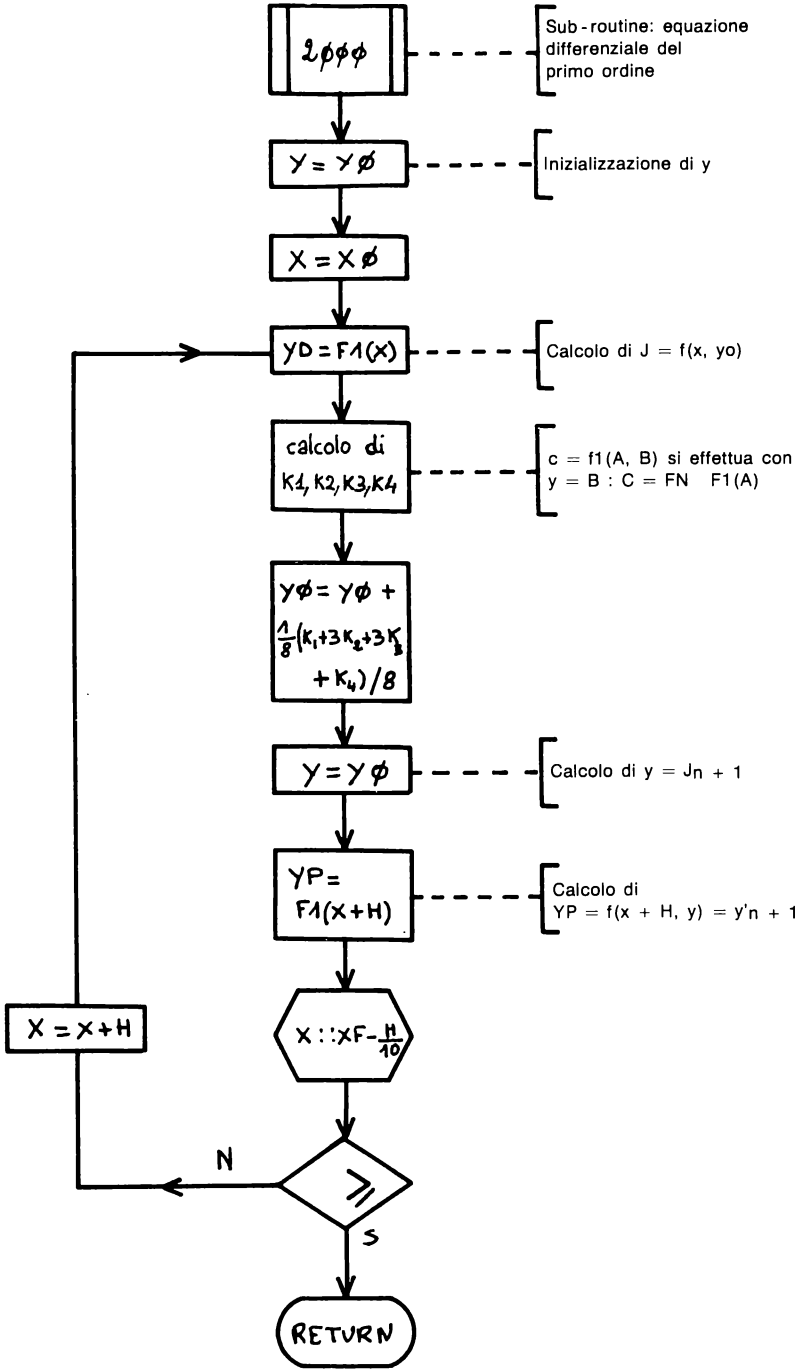
Le risoluzioni delle equazioni differenziali secondo gli algoritmi (2) e (5) sono realizzate tramite i sottoprogrammi 2000 e 3000.

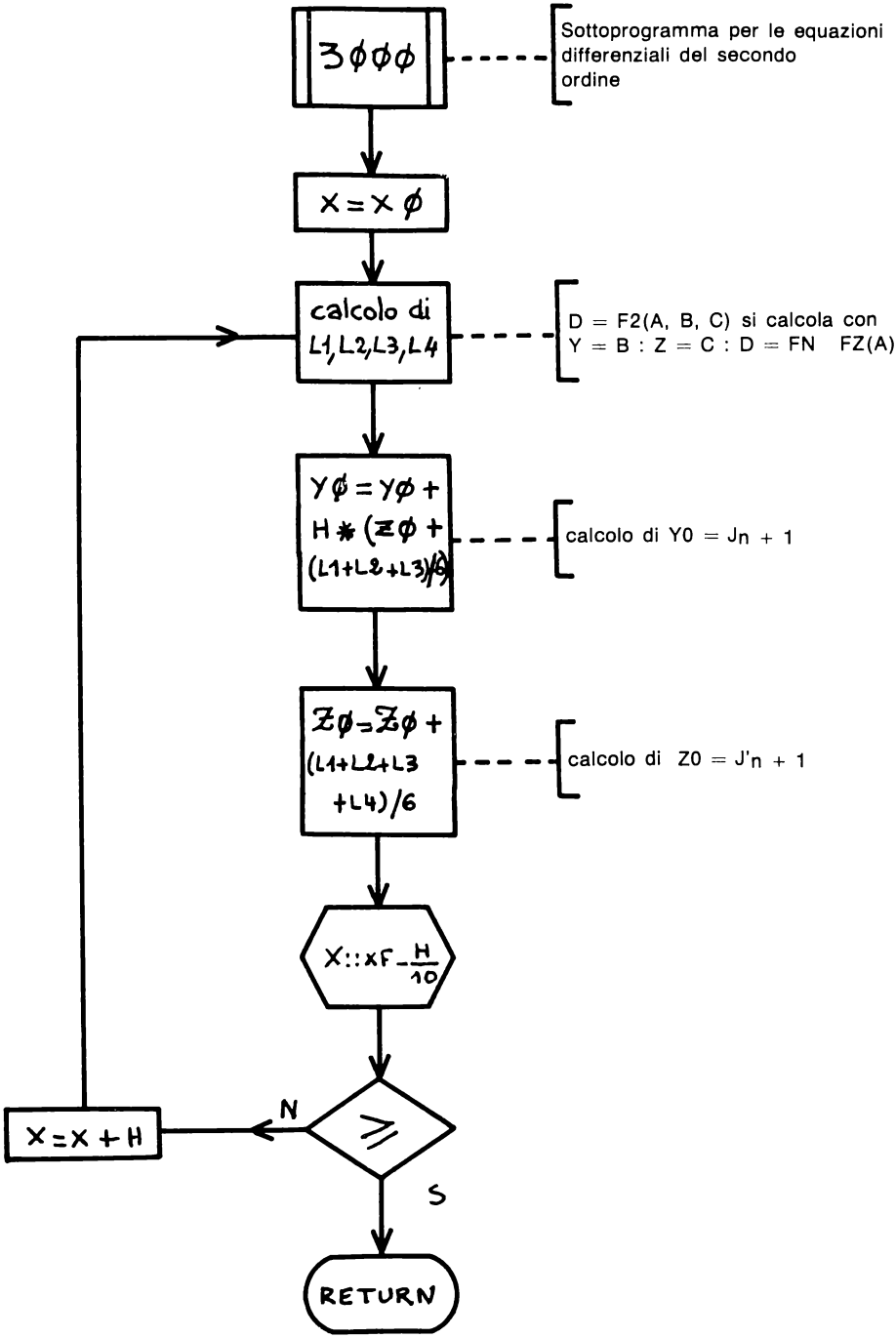
Il programma infine permette all'utente di scegliere tra il calcolo dei soli valori finali (x_f, y_f, y'_f) e la stampa della tabella dei valori assunti da x, y, y' ad ogni passo. (Ovviamente quest'ultima richiesta richiederà più tempo per essere esaudita).

3 — DIAGRAMMA A BLOCCHI




1
tabulazione
I = Ø
XØ=XI+I*H
XF=XI+(I+1)
* H
Definizione dei parametri
per i sottoprogrammi
1
DE
2
2ØØØ
GOSUB
GOSUB
3ØØØ
X
YØ
YP
Stampa della
tabella
X, Y, Y'
X
YØ
ZØ
I::N-1
N
I=I+1
S
FINE


2000
Sub-routine: equazione differenziale del primo ordine
Y = Y0
Inizializzazione di y
X = X0
YD = F1(X)
Calcolo di J = f(x, yo)
calcolo di K1, K2, K3, K4
c = f1(A, B) si effettua con y = B : C = FN F1(A)
Y0 = Y0 + 1/8 (K1+3K2+3K3 + K4)/8
Y = Y0
Calcolo di y = Jn + 1
YP = F1(X+H)
Calcolo di YP = f(x + H, y) = y'n + 1
X = X+H
X : : XF - H/10
N
S
RETURN


3000
Sottoprogramma per le equazioni differenziali del secondo ordine
X=X0
calcolo di L1,L2,L3,L4
D = F2(A, B, C) si calcola con
Y = B : Z = C : D = FN FZ(A)
Y0=Y0+H*(Z0+(L1+L2+L3)/6)
calcolo di Y0 = Jn + 1
Z0=Z0+(L1+L2+L3+L4)/6
calcolo di Z0 = J'n + 1
X::XF-H/10
N
X=X+H
S
RETURN

4 — PROGRAMMA

```
1  REM      EQUAZIONI DIFFERENZIALI
2  REM      DEL PRIMO E SECONDO ORDINE
3  REM
4  REM                    AUTORE:H.HAUT
5  REM
6  REM
7  REM        DESCRIZIONE:
8  REM            IL PROGRAMMA PERMETTE DI RISOLVERE LE
9  REM            SEGUENTI EQUAZIONI DIFFERENZIALI
10  REM            1.Y'(X)=F(X,Y)
11  REM            2.Y''(X)=F(X,Y,Y')
12  REM           CON IL METODO DI RUNGE-KUTTA
13  REM
14  REM  ******************************************
15  REM
16  REM
100  REM
110  REM   REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 7);"EQUAZIONI DIFFERENZIALI"
150  PRINT  TAB( 7);"DEL 1MO E 2DO ORDINE."
160  PRINT : PRINT  TAB( 20);"AUTORE:H.HAUT"
170  PRINT
180  PRINT "1.L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI 1MO        ORDINE Y'=F1(X,Y) DEV
     E ESSERE DEFINITA"
190  PRINT "  ALLA LINEA 320 SECONDO IL MODELLO:"
200  PRINT "    DEF F1(X)=X^2-Y^2 ,DOVE                    F1(X)=Y'"
210  PRINT "2.L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI
211  PRINT "  SECONDO ORDINE:": PRINT "  Y''=F2(X,Y,Y'')"
212  PRINT "  DEVE ESSERE DEFINITA ALLA LINEA"
220  PRINT "  360 SECONDO IL MODELLO:"
230  PRINT "    DEF F2(X)=X*Z-Y  ,DOVE                    F2(X)=Y''
                              Z=Y'        "
240  PRINT "3.INSERIRE POI L'ORDINE DELL'EQUAZIONE"
250  PRINT "4.DEFINIRE LE CONDIZIONI INIZIALI, IL      VALORE FINALE DI X E
     D IL PASSO VOLUTO"
260  VTAB 22: PRINT "PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE  ": GET A$
270  HOME
280  REM
290  REM   DEFINIZIONI DELLE EQUAZIONI
300  REM
310  REM   PRIM'ORDINE
320  DEF  FN F1(X) = 4 * X - 2 * Y
330  REM      F1(X)=Y'
340  REM
350  REM   SECOND'ORDINE
360  DEF  FN F2(X) =  - 4 * Y - 4 * Z
370  REM      F2(X)=Y''
380  REM      Z=Y'
390  REM
400  REM   GESTIONE DEI RISULTATI
410  REM
420  INPUT "ORDINE DELL'EQUAZ.= ";DE: PRINT : PRINT
430  ON DE GOTO 470,700: REM     SALTO A SECONDA DELL'ORDINE
440  REM
450  REM   PRIMO ORDINE
460  REM
470  PRINT "CONDIZIONI INIZIALI: "
480  INPUT "   X0=";X0
490  INPUT "   Y0=";Y0
500  PRINT : INPUT "CALCOLO NEL PUNTO X=";XF: PRINT
510  PRINT : PRINT "L'APPROSSIMAZIONE E' DI H^5!"
520  INPUT " PASSO H=";H
```

```
530  REM
540  REM    POSSIBILITA' DI TABULARE
550  REM
560  INPUT "VOLETE UNA TABELLA?";A$
570  IF A$ = "S" THEN  GOTO 950
580  REM
590  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
600  REM
610  GOSUB 2000
620  REM
630  REM   GESTIONE DEI RISULTATI (PRIMO ORDINE)
640  REM
650  PRINT "RISULTATI:"
660  PRINT "  X =";X
670  PRINT "  Y =";Y0
680  PRINT "  Y'=";YP
690  END
700  REM
710  REM   SECONDO ORDINE
720  REM
730  PRINT "CONDIZIONI INIZIALI:"
740  INPUT "   X0=";X0
750  INPUT "   Y0=";Y0
760  INPUT "  Y'0=";Z0
770  PRINT : INPUT "CALCOLO NEL PUNTO X=";XF
780  PRINT : PRINT "L'APPROSSIMAZIONE E' DI H^5!"
790  INPUT " PASSO H=";H
800  PRINT
810  INPUT "VOLETE UNA TABELLA?";A$: REM   POSSIBILITA' DI TABULARE
820  IF A$ = "S" THEN  GOTO 950
830  REM
840  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
850  REM
860  GOSUB 3000
870  REM
880  REM   GESTIONE DEI RISULTATI (SECONDO ORDINE)
890  REM
900  PRINT "RISULTATI:"
910  PRINT "   X=";X
920  PRINT "   Y=";Y0
930  PRINT "  Y'=";Z0
940  END
950  REM
960  REM   TABULATO
970  REM
980  HOME
990  PRINT " X "; TAB( 8);" Y "; TAB( 22);" Y' "
1000  PRINT "---"; TAB( 8);"---"; TAB( 22);"----"
1010 XI = X0
1020 N = (XF - XI) / H: REM   NUMERO DI PUNTI INTERMEDI DA CALCOLARE
1030  REM
1040  REM    EVENTUALE CORREZIONE DI N PER ARROTONDAMENTO
1050  IF  INT (N) <  > N THEN N = N + 1
1060  REM
1070  FOR I = 0 TO N - 1
1080 X0 = XI + I * H
1090 XF = XI + (I + 1) * H
1100  REM   CALCOLO DI UN PUNTO INTERMEDIO
1110  ON DE GOSUB 2000,3000
1120  REM   STAMPA DEL TABULATO
1130  IF DE = 2 THEN YP = Z0
1140  PRINT XF;"  "; TAB( 8);Y0;"  "; TAB( 22);YP
1150  REM   PROSECUZIONE DELLA TABELLA
1160  NEXT I
1170  END
2000  REM  ******************************************
2010  REM   SOTTOPROGRAMMA PER RISOLVERE L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE:
```

```
2020  REM      Y'=F1(X,Y)
2030  REM    CON IL METODO DI RUNGE-KUTTA
2040  REM
2050  REM    REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
2060  REM
2070  REM      1.DATI NECESSARI:
2080  REM        * F1(X,Y) DEFINITA DA FN F1(X)
2090  REM          SECONDO IL MODELLO:
2100  REM           DEF FN F1(X)=4*X-2*Y
2110  REM           (IL CALCOLO DI C=F1(A,B) SI EFFETTUA
2120  REM            CON  Y=B:C=FN F1(A) )
2130  REM        * X0=VALORE INIZIALE DI X
2140  REM        * Y0=VALORE INIZIALE DI Y
2150  REM        * H=PASSO
2160  REM          (L'INTERVALLO XF-XI DOVE CONTENERE
2170  REM           UN NUMERO INTERO DI PASSI)
2180  REM        * XF=VALORE FINALE DEL CALCOLO
2190  REM      2.RISULTATI FORNITI:
2200  REM        * X=VALORE FINALE DI X
2210  REM        * Y0=VALORE DI Y IN X
2220  REM        * YP=VALORE DI Y'IN X
2230  REM      3.VARIABILI UTILIZZATE:
2240  REM        H,K1,K2,K3,K4,X0,X,XF,Y0,Y,YD,YP
2250  REM      4.FUNZIONE UTILIZZATA:
2260  REM        F1(X)
2270  REM  ********************************************
2280 Y = Y0: REM   INIZIALIZZAZIONE DI Y
2290  FOR X = X0 TO XF - H / 10 STEP H
2300 YD =  FN F1(X): REM   CALCOLO DI Y'=F(X,Y0)
2310  REM   CALCOLO DI K1
2320 K1 = H * YD
2330  REM   CALCOLO DI K2
2340 Y = Y0 + K1 / 3
2350 K2 = H *  FN F1(X + H / 3)
2360  REM   CALCOLO DI K3
2370 Y = Y0 - K1 / 3 + K2
2380 K3 = H *  FN F1(X + 2 * H / 3)
2390  REM   CALCOLO DI K4
2400 Y = Y0 + K1 - K2 + K3
2410 K4 = H *  FN F1(X + H)
2420  REM   CALCOLO DI Y(N+1) (CFR TESTO)
2430 Y0 = Y0 + (K1 + 3 * K2 + 3 * K3 + K4) / 8
2440 Y = Y0: REM   CALCOLO DEL VALORE DI Y
2450 YP =  FN F1(X + H)
2460  NEXT X
2470  REM   ALL'USCITA DAL CICLO,X=XF,Y0=YF E YP=Y'F
2480  RETURN
3000  REM  ****************************************************
3010  REM  SOTTOPROGRAMMA PER LA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE
3020  REM      Y''=F2(X,Y,Y')
3030  REM   CON IL METODO DI RUNGE-KUTTA
3040  REM
3050  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
3060  REM
3070  REM      1.DATI NECESSARI:
3080  REM        * F2(X,Y,Y') DEFINITA DA FN F2(X)
3090  REM          SECONDO IL MODELLO:
3100  REM            DEF FN F2(X)=X*Z-Y
3110  REM          CON Z=Y'
3120  REM          (IL CALCOLO DI D=F2(A,B,C) SI EFFETTUA CON:
3130  REM          Y=B:Z=C:D=FN F2(A) )
3140  REM        * X0=VALORE INIZIALE DI X
3150  REM        * Y0=VALORE INIZIALE DI Y
3160  REM        * Z0=VALORE INIZIALE DI Y'
3170  REM        * H=PASSO
3180  REM          (L'INTERVALLO XF,XI DEVE CONTENERE
3190  REM           UN NUMERO INTERO DI PASSI)
```

```
3200  REM        * XF=VALORE FINALE DA CALCOLARE
3210  REM      2.RISULTATI FORNITI:
3220  REM        * X=VALORE FINALE DI X
3230  REM        * Y0=VALORE DI Y IN X
3240  REM        * Z0=VALORE DI Y' IN X
3250  REM      3.VARIABILI UTILIZZATE:
3260  REM       H,L1,L2,L3,L4,X0,X,XF,Y0,Y,Z0,Z
3270  REM      4.FUNZIONE UTILIZZATA:
3280  REM       F2(X)
3290  REM  ***************************************************
3300  FOR X = X0 TO XF - H / 10 STEP H
3310  REM   CALCOLO DI L1
3320 Y = Y0
3330 Z = Z0
3340 L1 = H *  FN F2(X)
3350  REM   CALCOLO DI L2
3360 Y = Y0 + H * Z0 / 2
3370 Z = Z0 + L1 / 2
3380 L2 = H *  FN F2(X + H / 2)
3390  REM   CALCOLO DI L3
3400 Z = Z0 + L2 / 2
3410 Y = Y + H * L1 / 4
3420 L3 = H *  FN F2(X + H / 2)
3430  REM   CALCOLO DI L4
3440 Y = Y0 + H * Z0 + H * L2 / 2
3450 Z = Z0 + L3
3460 L4 = H *  FN F2(X +'H)
3470  REM   CALCOLO DEL VALORE DI Y0
3480 Y0 = Y0 + H * (Z0 + (L1 + L2 + L3) / 6)
3490  REM   CALCOLO DEL VALORE DI Z0
3500 Z0 = Z0 + (L1 + 2 * L2 + 2 * L3 + L4) / 6
3510  NEXT X
3520  REM
3530  REM   ALL'USCITA DAL CICLO,X=XF,Y0=YF E Z0=Y'F
3540  RETURN
```

5 — ESEMPIO PRATICO

L'esempio mostra la tabulazione tra 0 e 1 delle funzioni y(x) e y'(x), definite tramite l'equazione differenziale del primo ordine y' = 4x — 2y e soddisfacenti alle condizioni iniziali x = 0 e y = — 2, realizzata con passo .5.

La soluzione esatta,

$y = 2x - 1 - e^{-2x}$, dà per x = 1 il valore y = .864664716 e il valore y' = 2.27067056.

```
 RUN
      EQUAZIONI DIFFERENZIALI
      DEL 1MO E 2DO ORDINE.

                    AUTORE:H.HAUT

1.L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI 1MO
 ORDINE Y'=F1(X,Y) DEVE ESSERE DEFINITA
  ALLA LINEA 320 SECONDO IL MODELLO:
    DEF F1(X)=X^2-Y^2 ,DOVE
       F1(X)=Y'
```

```
2.L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI
  SECONDO ORDINE:
  Y''=F2(X,Y,Y'')
  DEVE ESSERE DEFINITA ALLA LINEA
  360 SECONDO IL MODELLO:
    DEF F2(X)=X*Z-Y  ,DOVE
      F2(X)=Y''
      Z=Y'
3.INSERIRE POI L'ORDINE DELL'EQUAZIONE
4.DEFINIRE LE CONDIZIONI INIZIALI, IL
  VALORE FINALE DI X ED IL PASSO VOLUTO
PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
ORDINE DELL'EQUAZ.= 1


CONDIZIONI INIZIALI:
   X0=0
   Y0=-2

CALCOLO NEL PUNTO X=1


L'APPROSSIMAZIONE E' DI H^5!
 PASSO H=.05
VOLETE UNA TABELLA?S
 X       Y              Y'
---     ---            ----
.05     -1.8048375     3.809675
.1      -1.6187309     3.6374618
.15     -1.44081842    3.48163685
.2      -1.27032029    3.34064058
.25     -1.10653094    3.21306187
.3      -.948811935    3.09762387
.35     -.796585619    2.99317124
.4      -.64932929     2.89865858
.45     -.506569991    2.81313998
.5      -.367879775    2.73575955
.55     -.232871415    2.66574283
.6      -.101194539    2.60238908
.65     .027467886     2.54506423
.7      .153402723     2.49319455
.75     .276869537     2.44626093
.8      .398103189     2.40379362
.85     .517316195     2.36536761
.9      .634700842     2.33059832
.95     .750431124     2.29913775
1       .864664472     2.27067106
```

tempo d'esecuzione: 4"
memoria richiesta: 6061 bytes (senza REM : 1762).

PROGRAMMA NUMERO 7

GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Questo programma utilizza le funzioni video-grafiche del sistema APPLE II PLUS per rappresentare una funzione definita dall'utente in un intervallo a piacere. Le scale sono realizzate in modo da sfruttare al massimo i 270 × 150 punti dello schermo.

1 — TECNICA DI PROGRAMMAZIONE

Dopo aver definito la funzione f(x) che si vuole rappresentare e gli estremi dell'intervallo di definizione XI e XF, si utilizza il sottoprogramma 1000 per calcolare il valore assunto dalla funzione stessa in 270 punti compresi tra XI e XF. Tali valori vengono memorizzati in un vettore Y(I) e tra essi si sceglie il valore massimo YF e il valore minimo YI. Si sceglie infine la scala delle ordinate in modo da sfruttare in toto i 150 punti verticali dello schermo.

La corrispondenza tra i valori X,Y calcolati ed i valori XP, YP che danno le coordinate grafiche è realizzata dalle seguenti formule:

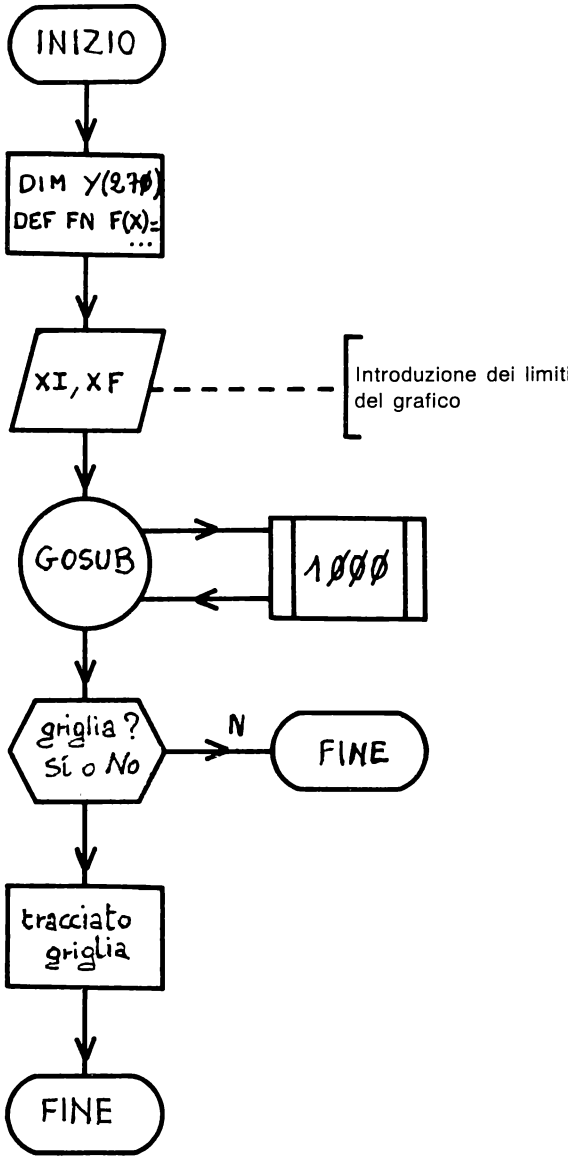
$$XP = 270 + (X - XF) \frac{270}{(XF - XI)}$$

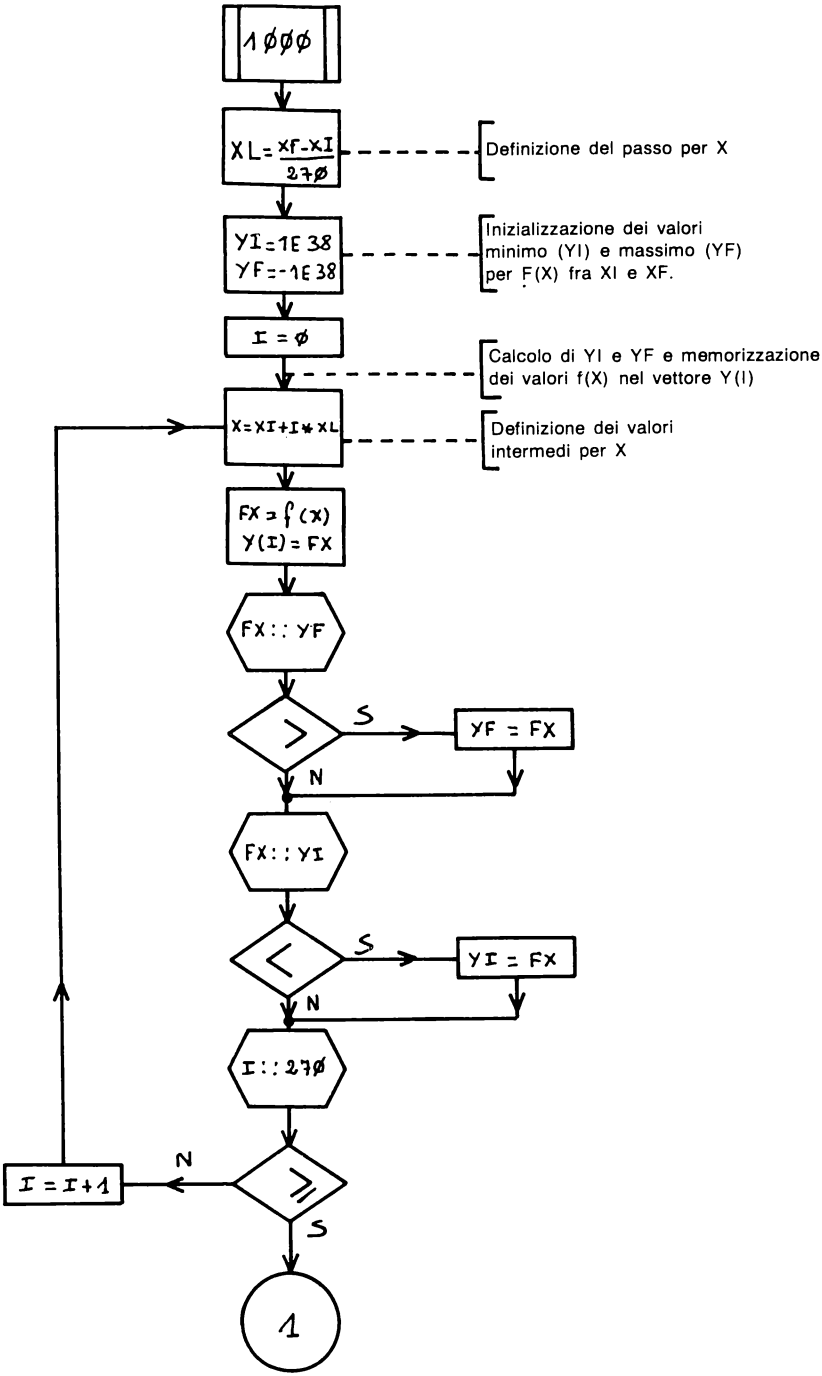
$$YP = 150 - (Y - YI) \frac{150}{(YF - YI)}$$

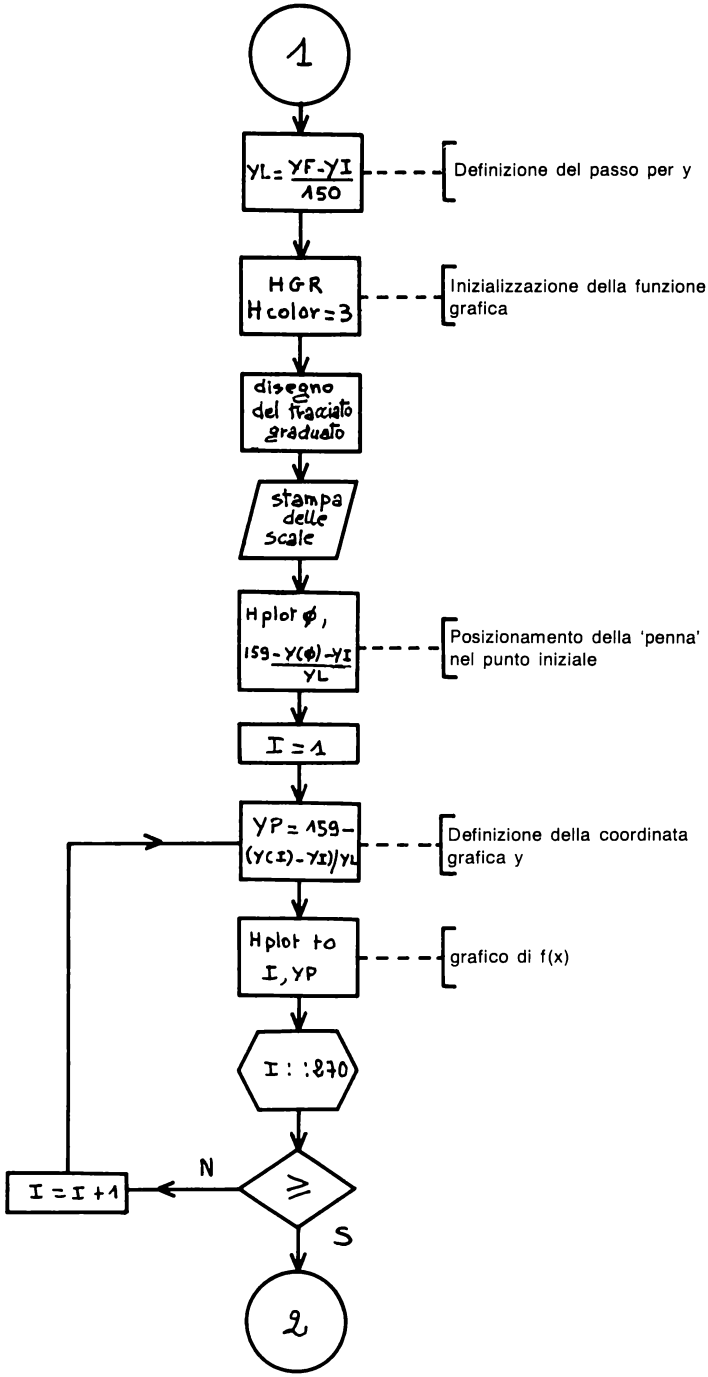
Il grafico della funzione viene così eseguito all'interno di un quadrato graduato, contenente anche gli assi cartesiani nel caso in cui XI < 0 < XF oppure YI < 0 < YF.

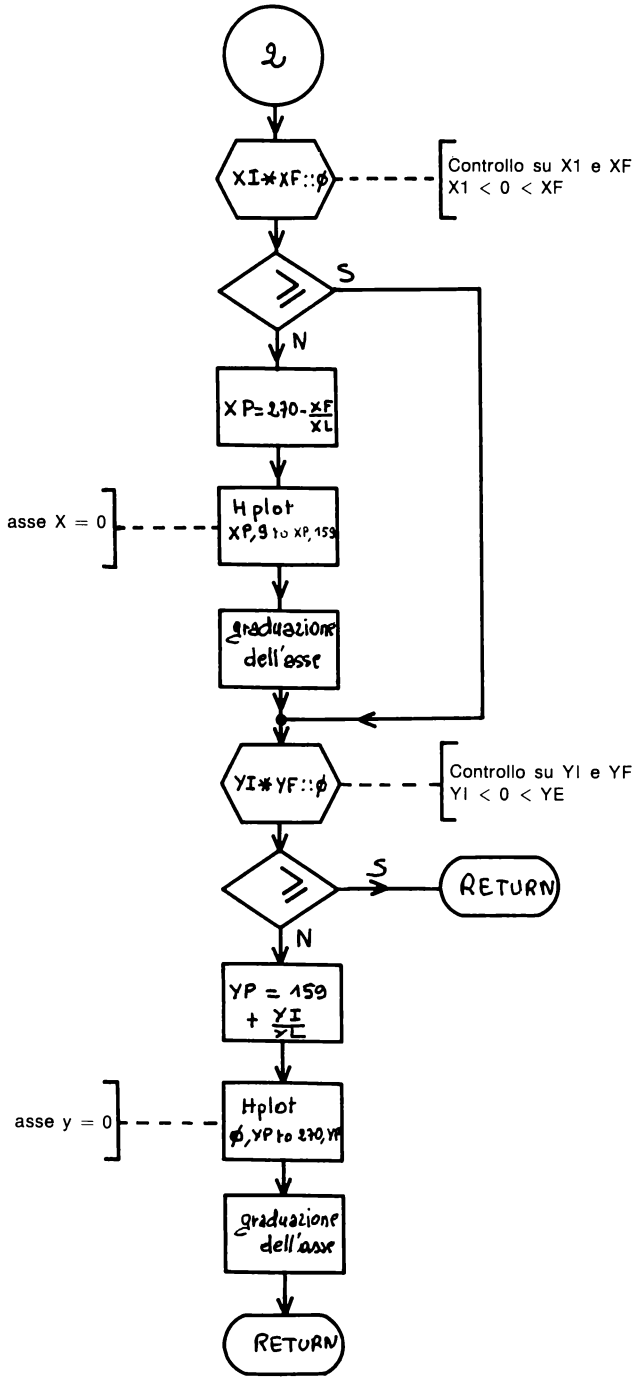
Viene inoltre lasciata all'utente la possibilità di utilizzare anche un secondo schermo supplementare.

2 — DIAGRAMMA A BLOCCHI




1ØØØ
XL=(XF-XI)/27Ø
Definizione del passo per X
YI=1E 38
YF=-1E 38
Inizializzazione dei valori minimo (YI) e massimo (YF) per F(X) fra XI e XF.
I = Ø
Calcolo di YI e YF e memorizzazione dei valori f(X) nel vettore Y(I)
X=XI+I*XL
Definizione dei valori intermedi per X
FX = f(X)
Y(I) = FX
FX : : YF
>
S
YF = FX
N
FX : : YI
<
S
YI = FX
N
I : : 27Ø
≥
N
I = I+1
S
1


1
YL= (YF-YI)/150
Definizione del passo per y
HGR
Hcolor=3
Inizializzazione della funzione grafica
disegno del tracciato graduato
stampa delle scale
Hplot ϕ, 159-(Y(ϕ)-YI)/YL
Posizionamento della 'penna' nel punto iniziale
I=1
YP=159-(Y(I)-YI)/YL
Definizione della coordinata grafica y
Hplot to I,YP
grafico di f(x)
I::870
N
I=I+1
S
2


2
XI*XF::ϕ
Controllo su X1 e XF
X1 < 0 < XF
≥
S
N
XP=270-XF/XL
asse X = 0
Hplot
XP,9 to XP,159
graduazione dell'asse
YI*YF::ϕ
Controllo su YI e YF
YI < 0 < YE
≥
S
RETURN
N
YP = 159 + YI/YL
asse y = 0
Hplot
ϕ,YP to 270,YP
graduazione dell'asse
RETURN

3 — PROGRAMMA

```
1  REM        GRAFICO DI UNA FUNZIONE F(X)
2  REM
3  REM                  AUTORE:H.HAUT
4  REM
5  REM
6  REM     DESCRIZIONE
7  REM        IL PROGRAMMA PERMETTE DI DISEGNARE IL GRAFICO
8  REM        DI UNA FUNZIONE F(X) DEFINITA DALL'UTENTE
9  REM        IN UN INTERVALLO A PIACERE
10  REM
11  REM  ***********************************************
100  REM
110  REM   REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 7);"GRAFICO DI UNA FUNZIONE"
150  PRINT : PRINT  TAB( 20);"AUTORE:H.HAUT"
160  PRINT
170  PRINT "1.IL PROGRAMMA REALIZZA IL GRAFICO DI     UNA FUNZIONE F(X) IN
      UN QUADRATO DI     (270*150) PUNTI."
180  PRINT
190  PRINT "  LE SCALE,GLI ASSI E IL PASSO SONO       CALCOLATI DAL PROGRA
     MMA"
200  PRINT
210  PRINT "2.LA FUNZIONE F(X) DEVE ESSERE DEFINITA   DALLL'UTENTE ALLA LI
     NEA 340 SECONDO     IL MODELLO:"
220  PRINT "      340 DEF F(X)=SIN(X)*COS(X)"
230  PRINT "  SE NON E' STATO ANCORA FATTO PREMERE    IL TASTO RESET, DEFI
     NIRE LA FUNZIONE    E BATTERE RUN"
240  PRINT
250  PRINT "3.INTRODURRE INFINE I VALORI INIZIALE E   FINALE DELLA VARIABI
     LE X CHE DELIMITA-  NO L'INTERVALLO DI DEFINIZIONE"
260  VTAB 23: PRINT "PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE": GET A$
270  REM
280  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
290  REM
300  DIM Y(270)
310  REM
320  REM   DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE
330  REM
340  DEF  FN F(X) = (X - 1) * (X + 1) * (X - 2) *  SIN (X)
350  REM
360  REM   GESTIONE DEI DATI IN INPUT
370  REM
380  HOME : INPUT "X INIZIALE=";XI
390  INPUT "X FINALE  =";XF
400  REM
410  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
420  REM
430  GOSUB 1000
440  REM
450  REM   GRIGLIA OPZIONALE
460  REM
470  INPUT "GRIGLIA (S O N)";A$
480  VTAB 1
490  IF A$ = "N" THEN  END
500  REM
510  REM   TRACCIA DELLA GRIGLIA
520  REM
530  FOR I = 1 TO 9
540 XP = 27 * I:YP = 159 - 15 * I
550  HPLOT 0,YP TO 270,YP
560  HPLOT XP,9 TO XP,159
570  NEXT I
```

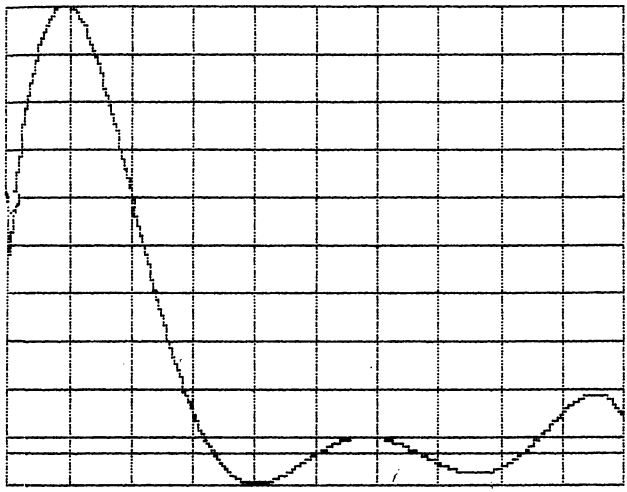
```
580  END
1000  REM  ****************************************
1010  REM   SOTTOPROGRAMMA PER IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE
1020  REM
1030  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
1040  REM
1050  REM      1.DATI NECESSARI:
1060  REM        * XI=VALORE INIZIALE DI X
1070  REM        * XF=VALORE FINALE DI X
1080  REM        * F(X)=FUNZIONE DI CUI SI VUOLE IL GRAFICO
1090  REM          DA XI A XF
1100  REM      2.RISULTATI FORNITI:
1110  REM        GRAFICO DI F(X) SU UNA GRIGLIA DI
1120  REM        270*150 PUNTI
1130  REM      3.VARIABILI UTILIZZATE:
1140  REM       FX,XF,XI,XL,XP,YF,YI,YL,YP
1150  REM      4.VETTORE UTILIZZATO:
1160  REM       Y(270)
1170  REM      5.FUNZIONE UTILIZZATA:
1180  REM       F(X)
1190  REM  ****************************************
1200 XL = (XF - XI) / 270: REM   FATTORE DI SCALA PER X
1210  REM
1220  REM    CALCOLO DI Y MASSIMO (YF) E MINIMO (YI)
1230  REM
1240 YI = 1E38:YF =  - 1E38: REM  INIZIALIZZAZIONE
1250  FOR I = 0 TO 270
1260 X = XI + I * XL
1270 FX =  FN F(X)
1280 Y(I) = FX
1290  IF FX > YF THEN YF = FX
1300  IF FX < YI THEN YI = FX
1310  NEXT I
1320 YL = (YF - YI) / 150: REM   FATTORE DI SCALA PER
1330  REM
1340  REM   TRACCIA DEL QUADRATO GRADUATO
1350  REM
1360  HGR : HCOLOR= 3: REM   INIZIALIZZAZIONE DELLA FUNZIONE GRAFICA
1370  HPLOT 0,9 TO 0,159 TO 270,159 TO 270,9 TO 0,9
1380  FOR I = 1 TO 9
1390 XP = 27 * I:YP = 159 - 15 * I
1400  HPLOT 0,YP TO 2,YP
1410  HPLOT 268,YP TO 270,YP
1420  HPLOT XP,9 TO XP,11
1430  HPLOT XP,157 TO XP,159
1440  NEXT I
1450  REM
1460  REM   VISUALIZZAZIONE DEI LIMITI
1470  REM
1480  VTAB (21): REM    PUNTATORE AL CAMPO TESTO
1490  PRINT "X:DA ";XI;" A ";XF;" CON PASSO";27 * XL
1500  PRINT "Y:DA ";YI;" A ";YF;" CON PASSO ";15 * YL
1510  REM
1520  REM   GRAFICO DELLA FUNZIONE
1530  REM
1540  HPLOT 0,159 - (Y(0) - YI) / YL
1550  FOR I = 1 TO 270
1560 YP = 159 - (Y(I) - YI) / YL
1570  HPLOT  TO I,YP
1580  NEXT I
1590  REM
1600  REM    VISUALIZZAZIONE DELL'ASSE
1610  REM
1620  IF XI * XF >  = 0 THEN  GOTO 1700
1630 XP = 270 - XF / XL
1640  HPLOT XP,9 TO XP,159
1650  REM   SUDDIVISIONE DEL GRAFICO
```

```
1660  FOR I = 1 TO 9
1670 YP = 159 - 15 * I
1680  HPLOT XP,YP TO XP + 2,YP
1690  NEXT I
1700  REM
1710  REM    VISUALIZZAZIONE DELL'ASSE X
1720  REM
1730  IF YI * YF >  = 0 THEN  GOTO 1810
1740 YP = 159 + YI / YL
1750  HPLOT 0,YP TO 270,YP
1760  REM   SUDDIVISIONE DEL CAMPO
1770  FOR I = 1 TO 9
1780 XP = 27 * I
1790  HPLOT XP,YP TO XP,YP + 2
1800  NEXT I
1810  RETURN
```

4 — ESEMPIO PRATICO

Si è realizzato il grafico della funzione $f(x) = (x - 1)\ (x + 1)\ (x - 2)$ nell'intervallo $-3 \leq x \leq +3$

```
RUN
     GRAFICO DI UNA FUNZIONE

                    AUTORE:H.HAUT

1.IL PROGRAMMA REALIZZA IL GRAFICO DI
  UNA FUNZIONE F(X) IN UN QUADRATO DI
  (270*150) PUNTI.

  LE SCALE,GLI ASSI E IL PASSO SONO
  CALCOLATI DAL PROGRAMMA

2.LA FUNZIONE F(X) DEVE ESSERE DEFINITA
  DALL'UTENTE ALLA LINEA 340 SECONDO
  IL MODELLO:
     340 DEF F(X)=SIN(X)*COS(X)
  SE NON E' STATO ANCORA FATTO PREMERE
  IL TASTO RESET, DEFINIRE LA FUNZIONE
  E BATTERE RUN

3.INTRODURRE INFINE I VALORI INIZIALE E
  FINALE DELLA VARIABILE X CHE DELIMITA-
  NO L'INTERVALLO DI DEFINIZIONE
PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
X INIZIALE=-3.
X FINALE  =+3
X:DA -3 A 3 CON PASSO.6
Y:DA -.939565076 A 14.1969636 CON PASSO
1.51365287
GRIGLIA (S O N)S
```



tempo d'esecuzione: 21"
memoria richiesta: 4830 bytes (senza REM : 3725).

PROGRAMMA NUMERO 8

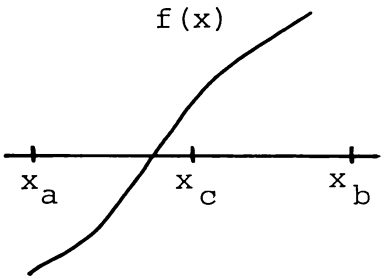
RICERCA DEGLI ZERI DI UNA FUNZIONE

Il metodo utilizzato permette di trovare tutti gli "zeri" reali di una funzione f(x) definita in un intervallo a,b.

1 — METODO NUMERICO

Si utilizza il cosiddetto metodo della "bisezione" che permette di calcolare il punto di un intervallo [a,b] in cui la funzione ammette uno zero, purché in tale intervallo la funzione ammette un unico zero.

Sotto questa ipotesi valgono le seguenti considerazioni:



1) se in $[x_a, x_b]$ vi è uno zero, allora risulta $f(x_a)\ f(x_b) < 0$

2) sia allora x_c il punto medio di $[x_a, x_b]$:
— se $f(x_a)\ f(x_c) > 0$, si considera il semintervallo $[x_c, x_b]$
— se $f(x_a)\ f(x_c) < 0$, si considera invece l'intervallo $[x_a, x_c]$

3) si ripetono le operazioni di cui al punto 2 finché la lunghezza dell'intervallo ottenuto non risulta inferiore della precisione richiesta.

Riferimenti bibliografici: A2, C2, C3, C4, H1, L2.

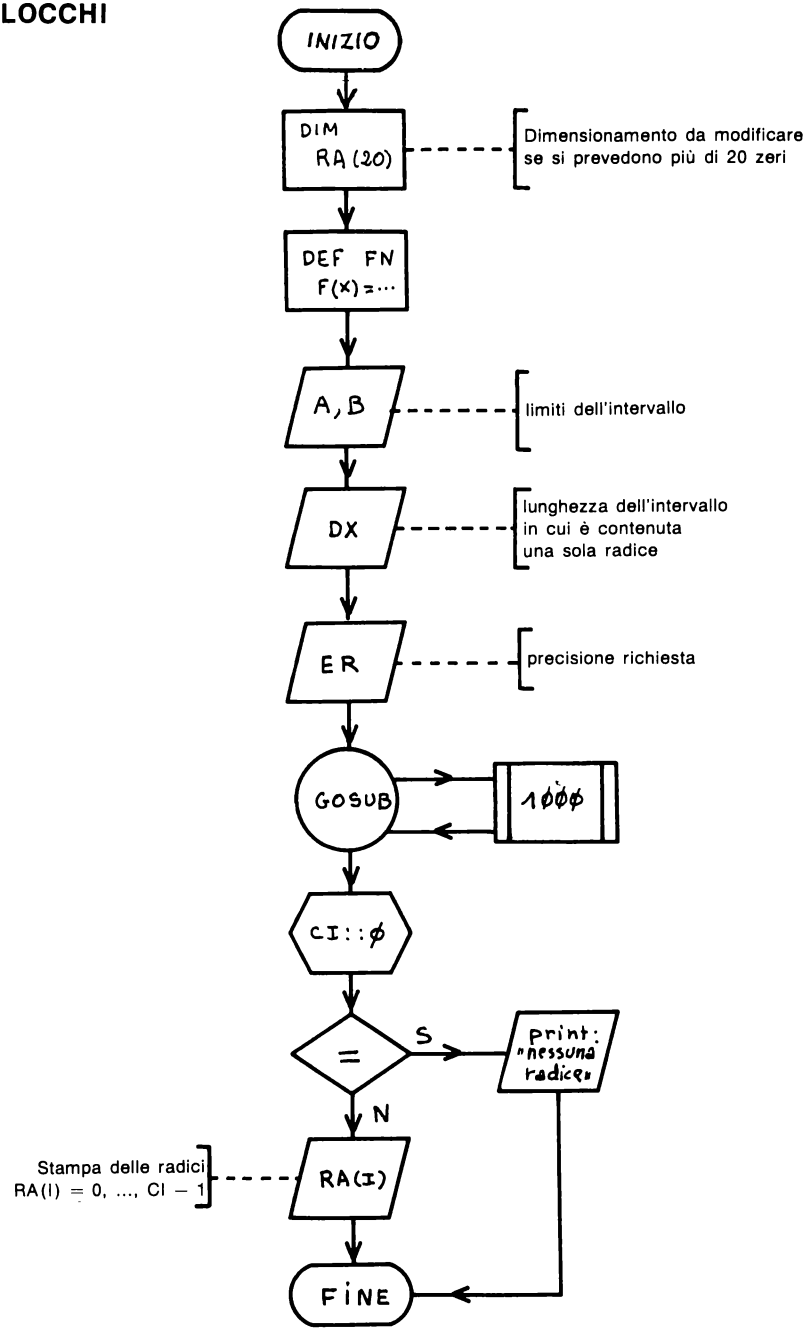
2 — TECNICA DI PROGRAMMAZIONE

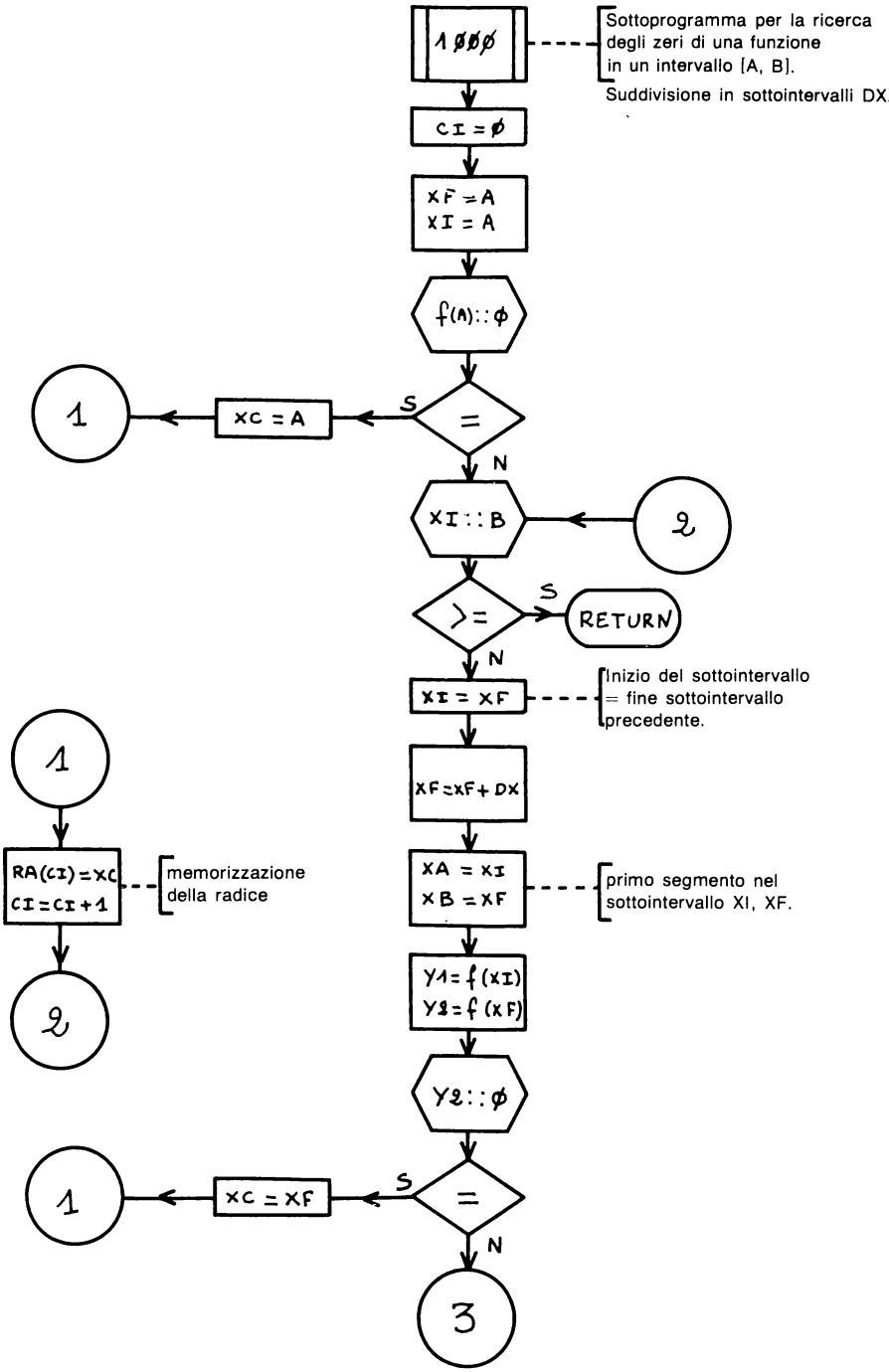
Per calcolare tutti gli zeri della funzione f(x) nell'intervallo [A, B], bisogna innanzitutto suddividere quest'intervallo in sottointervalli di lunghezza DX, in modo tale che in ciascuno di questi cada al più uno zero.

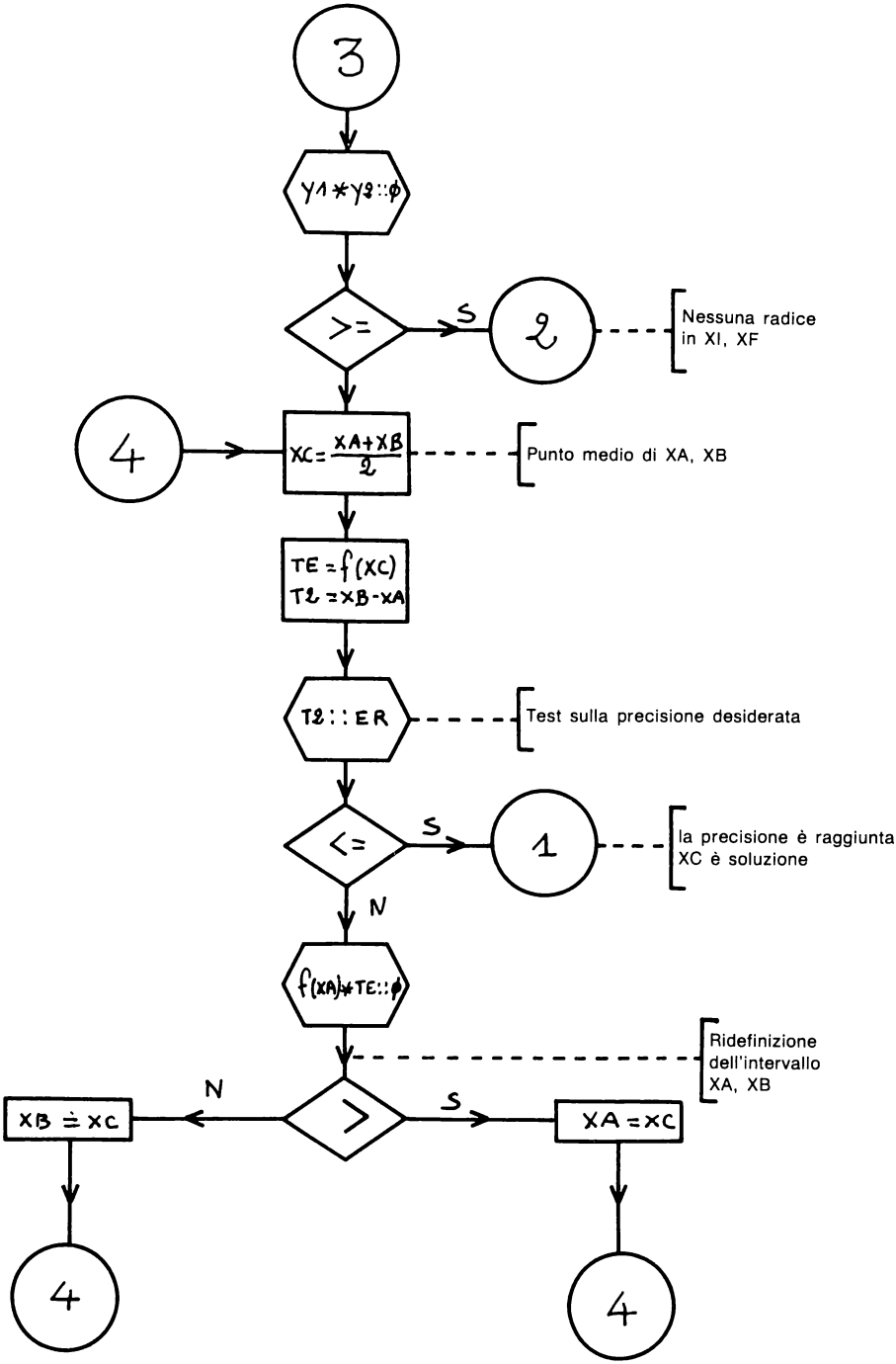
Ognuno di questi intervallini (chiamati [XI, XF]) viene a sua volta suddiviso in segmenti [XA, XB] utilizzando l'algoritmo esposto nel paragrafo precedente, finché XB — XA non risulta inferiore alla precisione ER voluta.

Le soluzioni vengono memorizzate in un vettore RA(I) che deve essere opportunamente dimensionato in base alla funzione prescelta. La variabile CI indica il numero di soluzioni trovate [RA(0), RA(1), ..., RA(CI — 1)].

3 — DIAGRAMMA A BLOCCHI




1000
Sottoprogramma per la ricerca degli zeri di una funzione in un intervallo [A, B].
Suddivisione in sottointervalli DX.
CI = 0
XF = A
XI = A
f(A) :: 0
=
S
N
XC = A
1
XI :: B
2
>=
S
RETURN
N
XI = XF
Inizio del sottointervallo = fine sottointervallo precedente.
XF = XF + DX
XA = XI
XB = XF
primo segmento nel sottointervallo XI, XF.
Y1 = f(XI)
Y2 = f(XF)
Y2 :: 0
=
S
N
XC = XF
1
3
1
RA(CI) = XC
CI = CI + 1
memorizzazione della radice
2


3
Y1*Y2::ϕ
>=
S
2
Nessuna radice in XI, XF
4
XC = (XA+XB)/2
Punto medio di XA, XB
TE = f(XC)
T2 = XB-XA
T2::ER
Test sulla precisione desiderata
<=
S
1
la precisione è raggiunta XC è soluzione
N
f(XA)*TE::ϕ
Ridefinizione dell'intervallo XA, XB
N
>
S
XB ≐ XC
XA = XC
4
4

4 — PROGRAMMA

```
1  REM          CALCOLO DEGLI ZERI
2  REM           DI UNA FUNZIONE
3  REM
4  REM                  AUTORE:H.H
5  REM
6  REM
7  REM      DESCRIZIONE:
8  REM       IL PROGRAMMA RICERCA CON IL METODO DELLA
9  REM       BISEZIONE, TUTTI GLI ZERI DI UNA FUNZIONE IN
10  REM      UN INTERVALLO A,B DATO.
11  REM  ***********************************************
12  REM
13  REM
100  REM
110  REM    REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 11);"CALCOLO DEGLI ZERI"
150  PRINT  TAB( 11);"DI UNA FUNZIONE"
160  PRINT : PRINT  TAB( 20);"AUTORE:H.HAUT"
170  PRINT
180  PRINT "1.LA FUNZIONE DI CUI SI CERCANO GLI ZE-   RI DEVE ESSERE DEFIN
     ITA DALL'UTENTE     ALLA LINEA 280 SECONDO IL MODELLO"
190  PRINT "     280 DEF FN F(X)= ..."
200  PRINT "  SE NON E' GIA' STATO FATTO, PREMERE     RESET, DEFINIRE LA F
     UNZIONE E LANCIARE  IL PROGRAMMA": PRINT
210  PRINT "2.INTRODURRE POI L'INTERVALLO A,B IN CUI  SI CERCANO LE RADICI
      E IL PASSO SCELTO  IN MODO CHE IN OGNI SUDDIVISIONE DI     A,B CADA
     AL PIU' UNA RADICE"
220  PRINT : PRINT "3.INTRODURRE INFINE LA PRECISIONE DESI-   DERATA PER I
     L CALCOLO"
230  VTAB (23): PRINT "PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE": GET A$
240  HOME
250  REM
260  REM   DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE
270  REM
280  DEF  FN F(X) = (X - 10) * (X - 5) * (X + 1) * (X + 3)
290  REM
300  REM   ISTRUZIONE DI DIMENSIONAMENTO
310  REM   DA MODIFICARE SE SI PREVEDONO PIU' DI 20 RADICI !!!
330  REM
340  DIM RA(20)
350  REM
360  REM   GESTIONE DEI DATI IN INPUT
370  REM
380  PRINT "LIMITI DELL'INTERVALLO:"
390  INPUT "   A=";A
400  INPUT "   B=";B
410  PRINT : INPUT "SUDDIVISIONE DI A,B CON PASSO :";DX
420  PRINT : INPUT "PRECISIONE DESIDERATA: ";ER
430  PRINT
440  REM
450  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
460  REM
470  GOSUB 1000
480  REM
490  REM   GESTIONE DEI RISULTATI
500  REM
510  IF CI = 0 THEN  INVERSE : PRINT " NESSUNA RADICE !": NORMAL : END
520  FOR I = 0 TO CI - 1
530  PRINT "  RADICE ";I + 1;" = ";RA(I)
540  NEXT I
550  END
```

```
1000  REM ************************************************
1010  REM   SOTTOPROGRAMMA PER LA RICERCA DEGLI ZERI DI UNA FUNZIONE
1020  REM   IN UN INTERVALLO A,B (METODO DELLA BISEZIONE)
1040  REM
1050  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
1060  REM
1070  REM     1.DATI NECESSARI:
1080  REM       * F(X)=FUNZIONE DI CUI SI RICERCANO
1090  REM               LE RADICI
1100  REM       * INTERVALLO IN CUI SI RICERCANO
1110  REM         LE RADICI, DEFINITO DA:
1120  REM           A=LIMITE INFERIORE
1130  REM           B=LIMITE SUPERIORE
1140  REM       * DX=VALORE DEL PASSO
1150  REM           (NON VI PUO' ESSERE PIU' DI UNA
1160  REM           RADICE IN OGNI SOTTOINTERVALLO
1170  REM           DI LUNGHEZZA DX)
1180  REM       * ER=PRECISIONE DESIDERATA
1190  REM     2.RISULTATI FORNITI:
1200  REM       * CI=NUMERO DI RADICI
1210  REM       * RA(0),RA(1),...,RA(CI-1) SONO LE
1220  REM         RADICI TROVATE
1230  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
1240  REM      A,B,CI,DX,ER,TE,T2,XA,XB,XC,XI,XF,Y1,Y2
1250  REM     4.VETTORE UTILIZZATO:
1260  REM       RA(..) LA CUI DIMENSIONE DEVE ESSERE
1270  REM       SCELTA IN MODO CHE POSSA CONTENERE
1280  REM       TUTTE LE RADICI !!!
1290  REM ************************************************
1300 CI = 0
1310 XF = A:XI = A
1320  IF  FN F(A) = 0 THEN XC = A: GOTO 1490: REM   XC=A E' UNA RADICE
1330  IF XI >  = B THEN  RETURN : REM   LA RICERCA E' TERMINATA
1340 XI = XF: REM          DEFINIZIONE DELL'INTERVALLO
1350 XF = XF + DX: REM     DI LUNGHEZZA DX
1360 XA = XI:XB = XF: REM   PRIMO SEGMENTO NELL'INTERVALLO XI,XF
1370 Y1 =  FN F(XI)
1380 Y2 =  FN F(XF)
1390  IF Y2 = 0 THEN XC = XF: GOTO 1490: REM    XC=XF E' UNA RADICE
1400  IF Y1 * Y2 >  = 0 THEN  GOTO 1330: REM   CONTROLLO SULLA PRECISIONE
1410 XC = (XA + XB) / 2: REM   PUNTO MEDIO DI XA,XB
1420 TE =  FN F(XC)
1430 T2 = XB - XC
1440  IF T2 <  = ER THEN  GOTO 1490: REM XC E' SOLUZIONE PER LA PRECISIONE
     VOLUTA
1450  REM   RIDEFINIZIONE DI UN NUOVO SEGMENTO XA,XB
1460  IF  FN F(XA) * TE > 0 THEN XA = XC: GOTO 1480
1470 XB = XC
1480  GOTO 1410: REM   PROSECUZIONE DELLA RICERCA
1490  REM   MEMORIZZAZIONE DELLA SOLUZIONE
1500 RA(CI) = XC
1510 CI = CI + 1: REM   AGGIORNAMENTO DEL CONTATORE DI RADICI
1520  GOTO 1330: REM    PROSECUZIONE DELLA RICERCA
```

5 — ESEMPIO PRATICO

L'esempio illustra la ricerca degli zeri della funzione

$$f(x) = (x - 10)\ (x + 1)\ (x + 3)$$

nell'intervallo [— 20, + 20] con passo 1; la precisione richiesta è di 1E — 10

```
RUN
          CALCOLO DEGLI ZERI
          DI UNA FUNZIONE

                    AUTORE:H.HAUT

1.LA FUNZIONE DI CUI SI CERCANO GLI ZE-
  RI DEVE ESSERE DEFINITA DALL'UTENTE
  ALLA LINEA 280 SECONDO IL MODELLO
     280 DEF FN F(X)= ...
  SE NON E' GIA' STATO FATTO, PREMERE
  RESET, DEFINIRE LA FUNZIONE E LANCIARE
  IL PROGRAMMA

2.INTRODURRE POI L'INTERVALLO A,B IN CUI
  SI CERCANO LE RADICI E IL PASSO SCELTO
  IN MODO CHE IN OGNI SUDDIVISIONE DI
  A,B CADA AL PIU' UNA RADICE

3.INTRODURRE INFINE LA PRECISIONE DESI-
  DERATA PER IL CALCOLO
PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
LIMITI DELL'INTERVALLO:
   A=-20
   B=+20

SUDDIVISIONE DI A,B CON PASSO :1

PRECISIONE DESIDERATA: 1E-10

  RADICE 1 = -3
  RADICE 2 = -1
  RADICE 3 = 5
  RADICE 4 = 10
```

tempo d'esecuzione: 3"
memoria richiesta: 3795 (senza REM : 845).

PROGRAMMA NUMERO 9

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE MATRICIALE AX = B

Il programma permette di costruire la matrice inversa di una matrice A(n, n) e di calcolarne il determinante, nonché di risolvere uno o più sistemi lineari in più variabili. Inoltre il programma è concepito in modo da minimizzare l'area di memoria occupata.

1 — METODO NUMERICO

Siano A e B due matrici rispettivamente di dimensione (n, n) e (n, m). Volendo risolvere l'equazione matriciale AX = B, per economizzare spazio in memoria, si dovrà fare in modo, nel corso del programma, di utilizzare lo spazio occupato inizialmente dalle matrici A e B per costruire le due matrici A^{-1} (inversa di A) e $X = A^{-1}B$ (soluzione). In questo modo, alla fine del programma, si troveranno memorizzate A^{-1} al posto di A e X al posto di B.

Per risolvere questo problema si è utilizzato il metodo di Gauss-Jordan o metodo del "cardine".

Questo metodo consiste nell'effettuare sulla matrice A una serie di trasformazioni λ_1, λ_2, λ_n in modo da ridurre la matrice A alla matrice unità I. Applicando queste trasformazioni la matrice A, dopo k—1 passaggi avrà assunto la forma seguente:

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1k} & \dots & a'_{1n} \\
0 & 1 & \dots & 0 & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & & \\
0 & 0 & & 1 & & & \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & a'_{kk} & \dots & a'_{kn} \\
\cdot & \cdot & & & & & \\
\cdot & \cdot & 0 & & & & \\
\cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 0 & a'_{nk} & & a'_{nn}
\end{array}\right)
= \lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\dots\lambda_1 A
$$

La matrice inversa di A si può allora esprimere come:

$$A^{-1} = \lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_1 I$$

e

e la matrice X come:

$$X = \lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_1 B$$

Indicato con $a_{ij}^{(k)}$ e $b_{ij}^{(k)}$ gli elementi trasformati delle matrici A e B dopo k trasformazioni (k = 0 corrisponde alle matrici nella loro forma originaria) la trasformazione λ_k può essere definita tramite le seguenti operazioni:

1) $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}\, a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)})$

$$\text{per} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \\ j = k, \dots, n \end{cases}$$

2) $b_{ij}^{(k)} = b_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}\, b_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$

$$\text{per} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{cases}$$

3) $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)}$

$$\text{per} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, k-1 \end{cases}$$

4) $a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$ per $j = k, \dots, n$

5) $b_{kj}^{(k)} = b_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$ per $j = 1, \dots, m$

Durante ogni passo occorre effettuare la divisione per l'elemento "pivot" a_{kk}. Per minimizzare l'errore di arrotondamento si cercherà il più grande (pivot) elemento della sottomatrice

$$\begin{pmatrix} a'_{KK} & \cdots\cdots & a'_{kn} \\ & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a'_{nk} & & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

e lo si trasporterà, effettuando le opportune permutazioni tra le righe e le colonne della matrice A nella k-esima posizione sulla diagonale principale.

Alla fine del calcolo occorrerà riordinare la matrice ottenuta tenendo conto di queste trasformazioni.

Riferimenti bibliografici: B1, C1, C2, C4, D1, J1, L1, L2, S1, S2, S3.

2 — TECNICA DI PROGRAMMAZIONE

Il calcolo si effettua utilizzando un metodo iterativo in n passi. ($k = 1, \ldots, n$).

Poiché si vogliono memorizzare ad ogni passo i risultati intermedi per la costruzione di A^{-1} e X nello spazio occupato dalle matrici A e B, l'algoritmo utilizzato risulta di una certa complessità. Si consiglia pertanto al lettore di effettuare una prova dettagliata del programma utilizzando un esempio molto semplice (per esempio un sistema di tre equazioni in tre incognite).

Definiamo ora le operazioni che costituiscono il k-esimo passo. Dette r_i e c_j le righe e le colonne di A e B si ha:

1) — Ricerca del "pivot": si ricerca l'elemento a_{ij} ($i, j = k, \ldots, n$) con valore assoluto maggiore. Tale elemento a_{ikjk} verrà memorizzato in PV.

— Calcolo relativo al determinante: DET = DET * S * PV, ove S è l'indice relativo alle permutazioni e viene calcolato nel modo seguente:

$$S = S_r * S_c \qquad \text{ove} \qquad \begin{cases} S_r = \begin{cases} 1 & \text{se } i_k = k \\ -1 & \text{se } i_k \neq k \end{cases} \\ S_c = \begin{cases} 1 & \text{se } j_k = k \\ -1 & \text{se } j_k \neq k \end{cases} \end{cases}$$

— Memorizzazione di i_k e j_k in due vettori PL e PC

$$PL(K) = i_k \qquad PC(K) = j_k$$

2) Posizionamento del pivot nella matrice (in posizione k,k):

a) scambio di righe in A e B $\qquad r_k \longleftrightarrow r_{ik}$

b) scambio delle colonne in A $\qquad c_k \longleftrightarrow c_{jk}$

3) Memorizzazione della colonna k-esima di A in un vettore CS:

$CS(I) = a_{ik} \qquad (i = 1, ..., k - 1, k + 1, ..., n)$
$CS(K) = 0$

4) Modifica della colonna k-esima di A tramite la trasformazione $a_{ik} = \delta_{ik}$
$(\delta_{ik} = 1$ se $i = k; \qquad \delta_{ik} = 0$ se $i \neq k)$

5) Trasformazione della riga k-esima di A e di B mediante la divisione per PV

6) Modifica delle restanti righe di A e B mediante la trasformazione:

$$r_j \longleftrightarrow r_j - CS(J)\, r_k \qquad (j = 1, ..., k - 1, k + 1, ..., n).$$

Alla fine dell'ultimo passaggio (k = n) bisogna riordinare le matrici A e B tenendo conto delle permutazioni effettuate tra le righe e le colonne (vedi punto 2). Per ottenere ciò si può operare nel modo seguente:

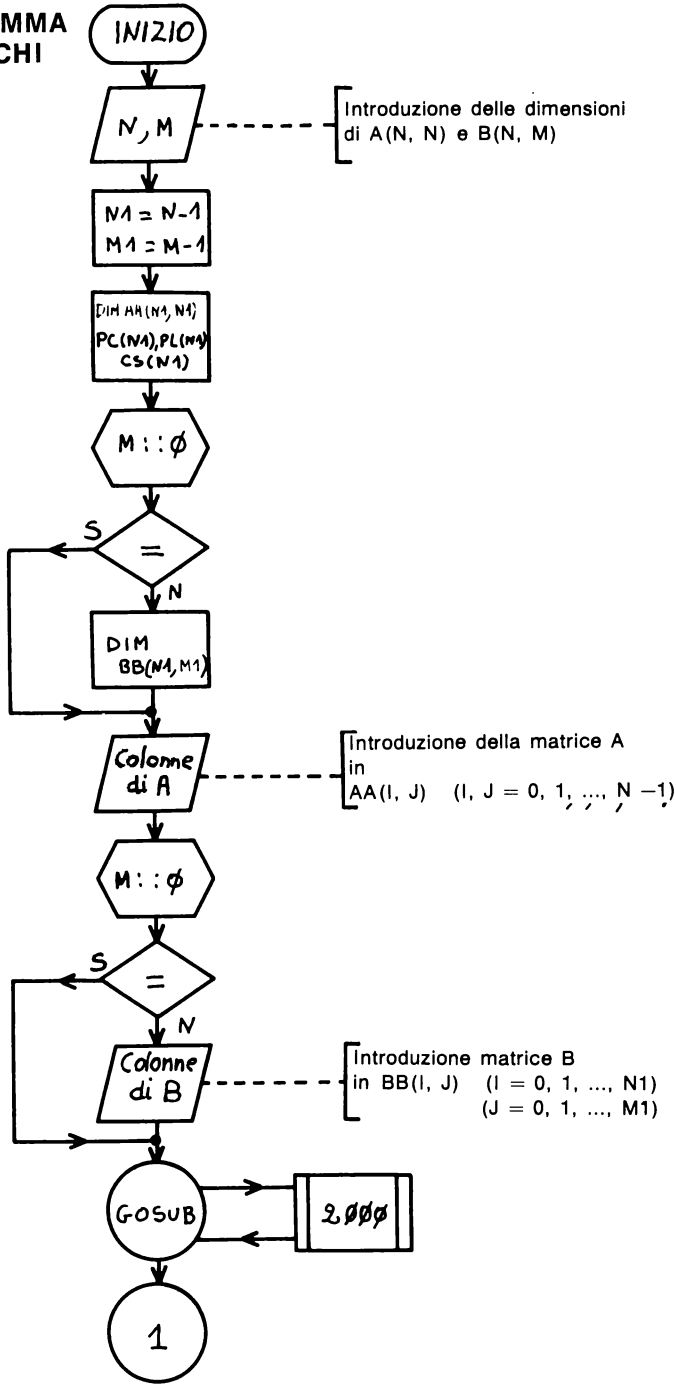
7) Scambio ordinato delle righe di A e B

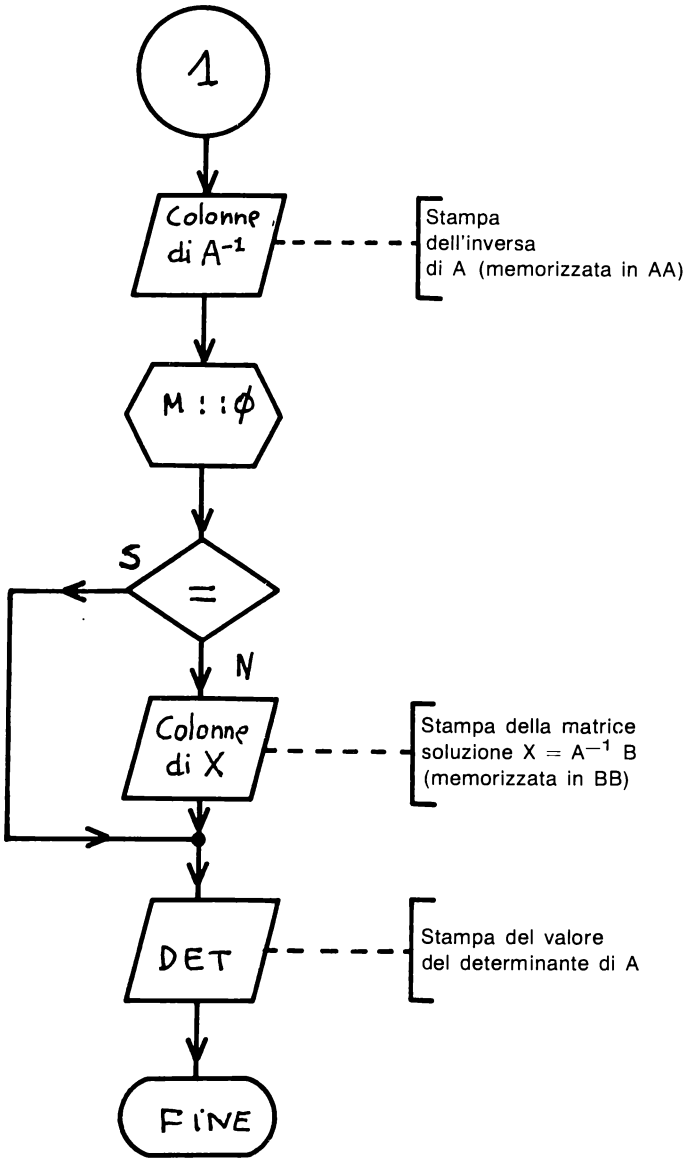
$$\begin{array}{ccc} r_n & \longleftrightarrow & r_{PC}(N) \\ r_{n-1} & \longleftrightarrow & r_{PC}(N-1) \\ & & . \\ . & & . \\ r_1 & \longleftrightarrow & r_{PC}(1) \end{array}$$

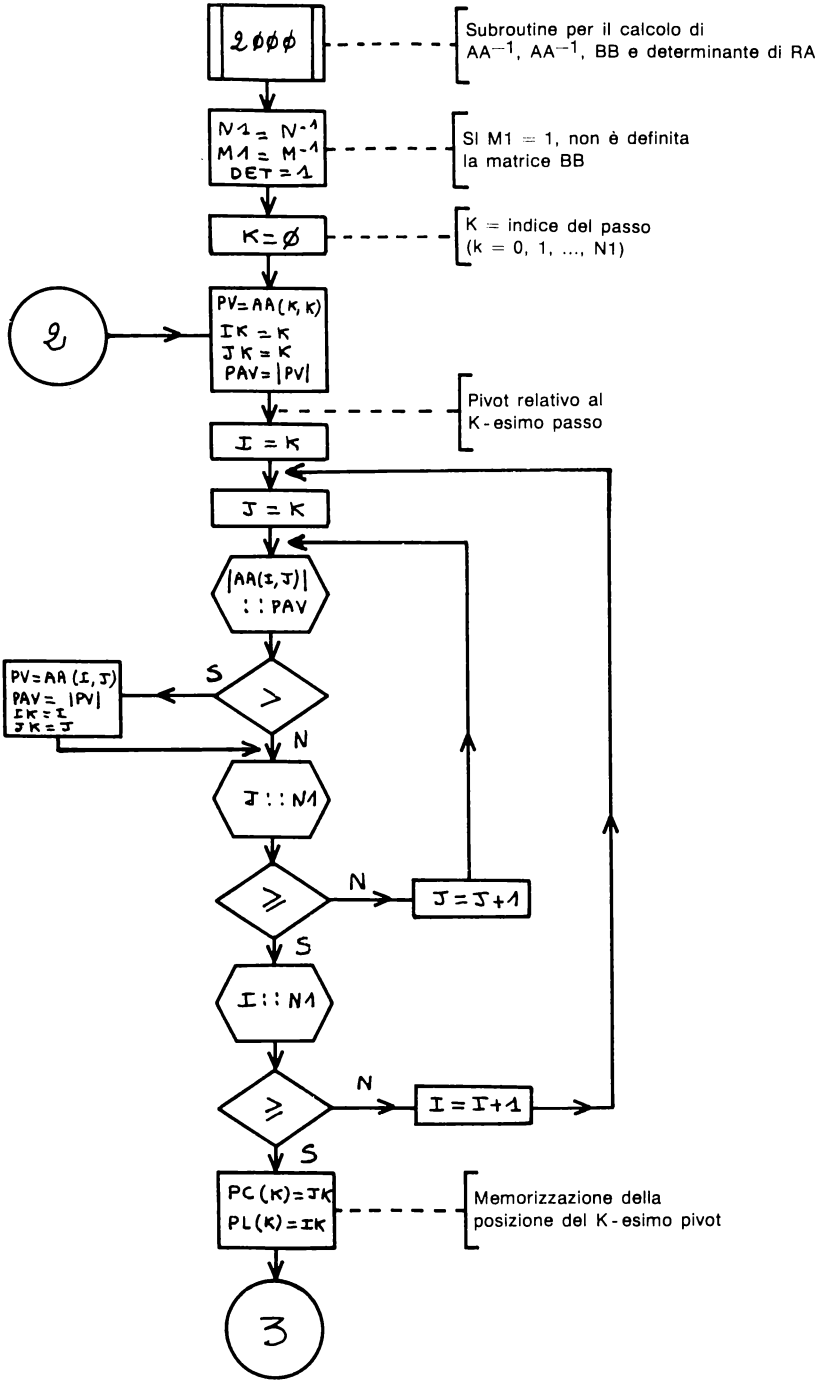
8) Scambio ordinato delle colonne di A:

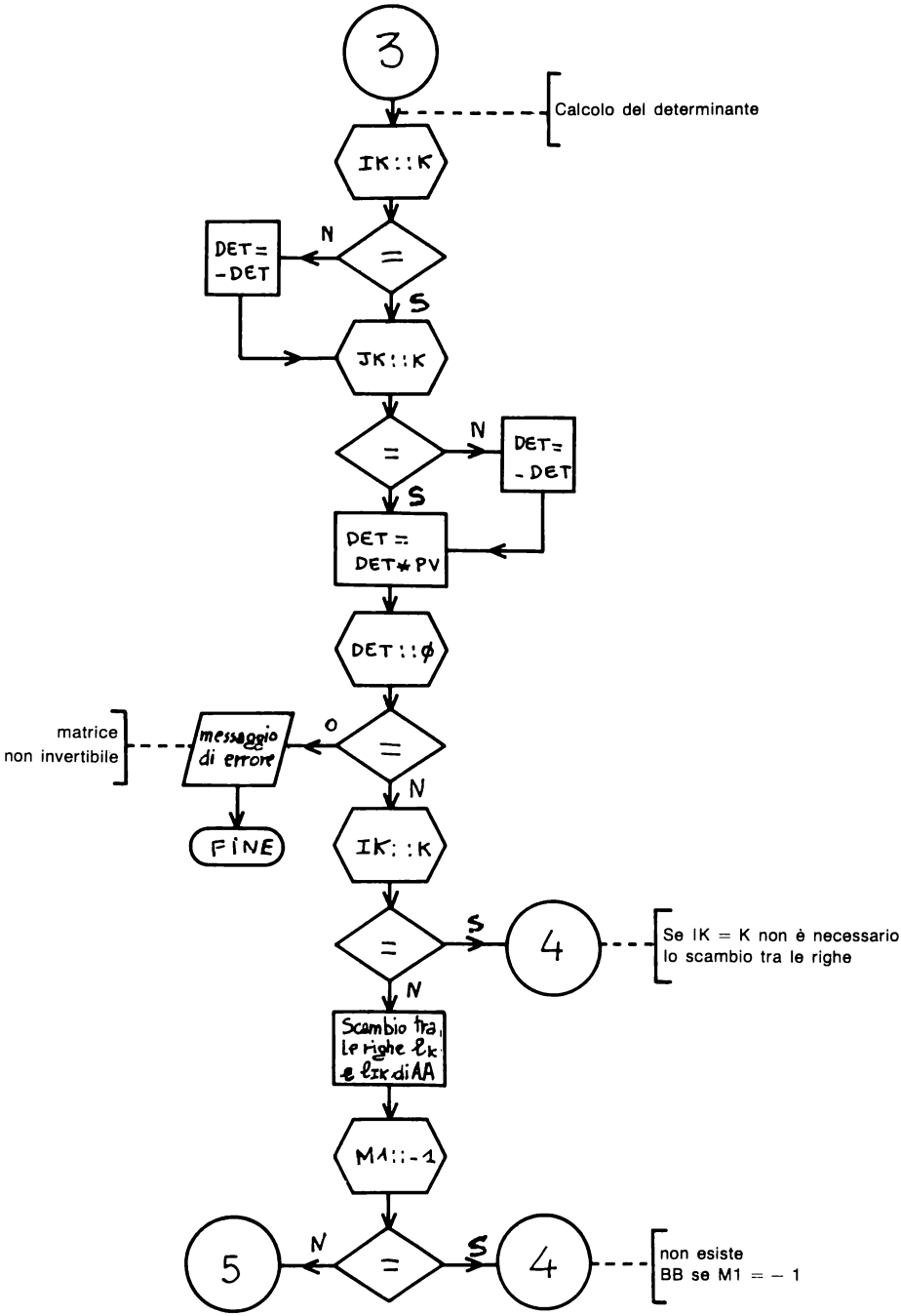
$$\begin{array}{ccc} c_n & \longleftrightarrow & c_{PL(N)} \\ c_{n-1} & \longleftrightarrow & c_{PL(N-1)} \\ . & & . \\ c_1 & \longleftrightarrow & c_{PL(1)} \end{array}$$

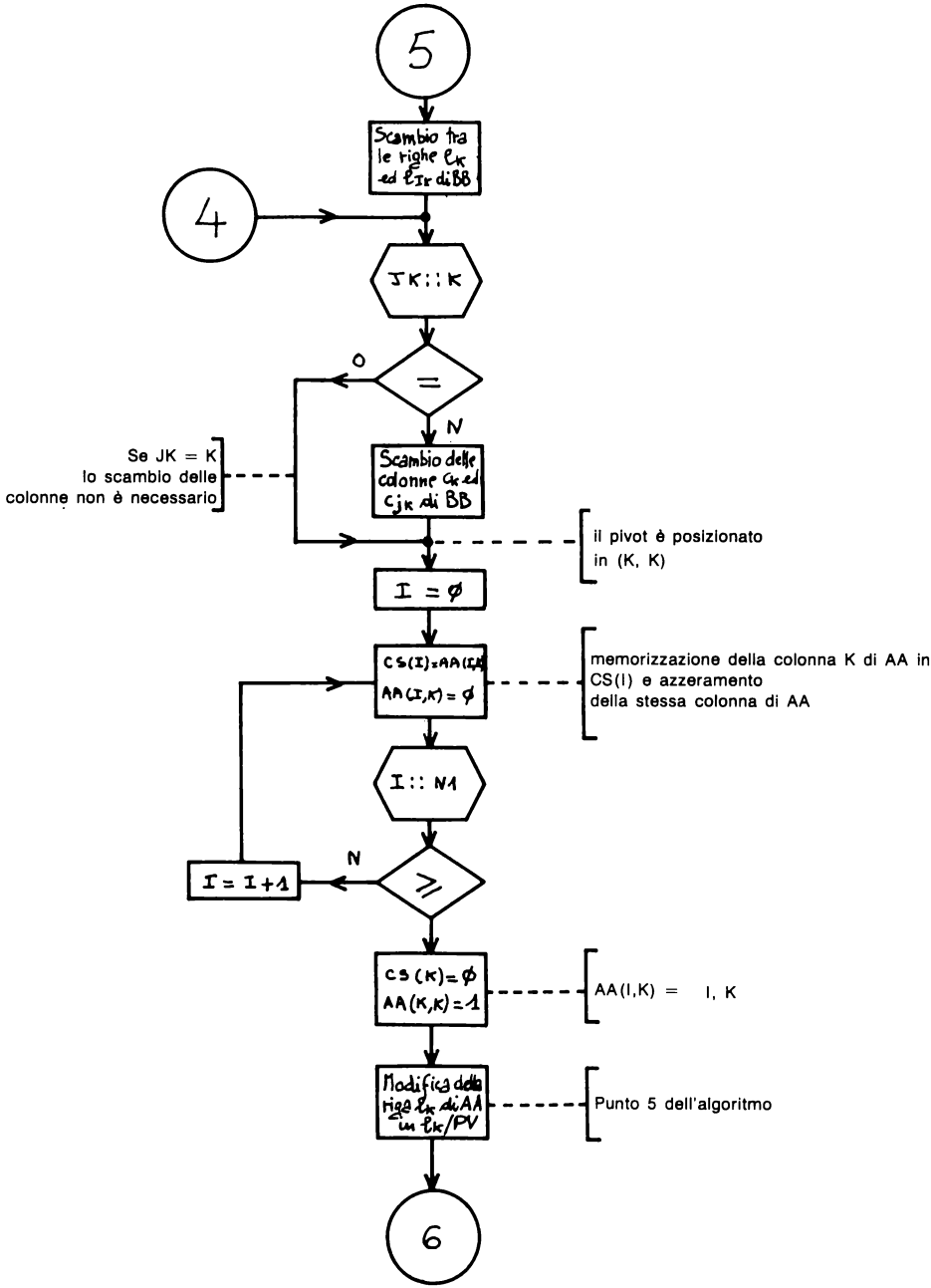
3 — DIAGRAMMA A BLOCCHI

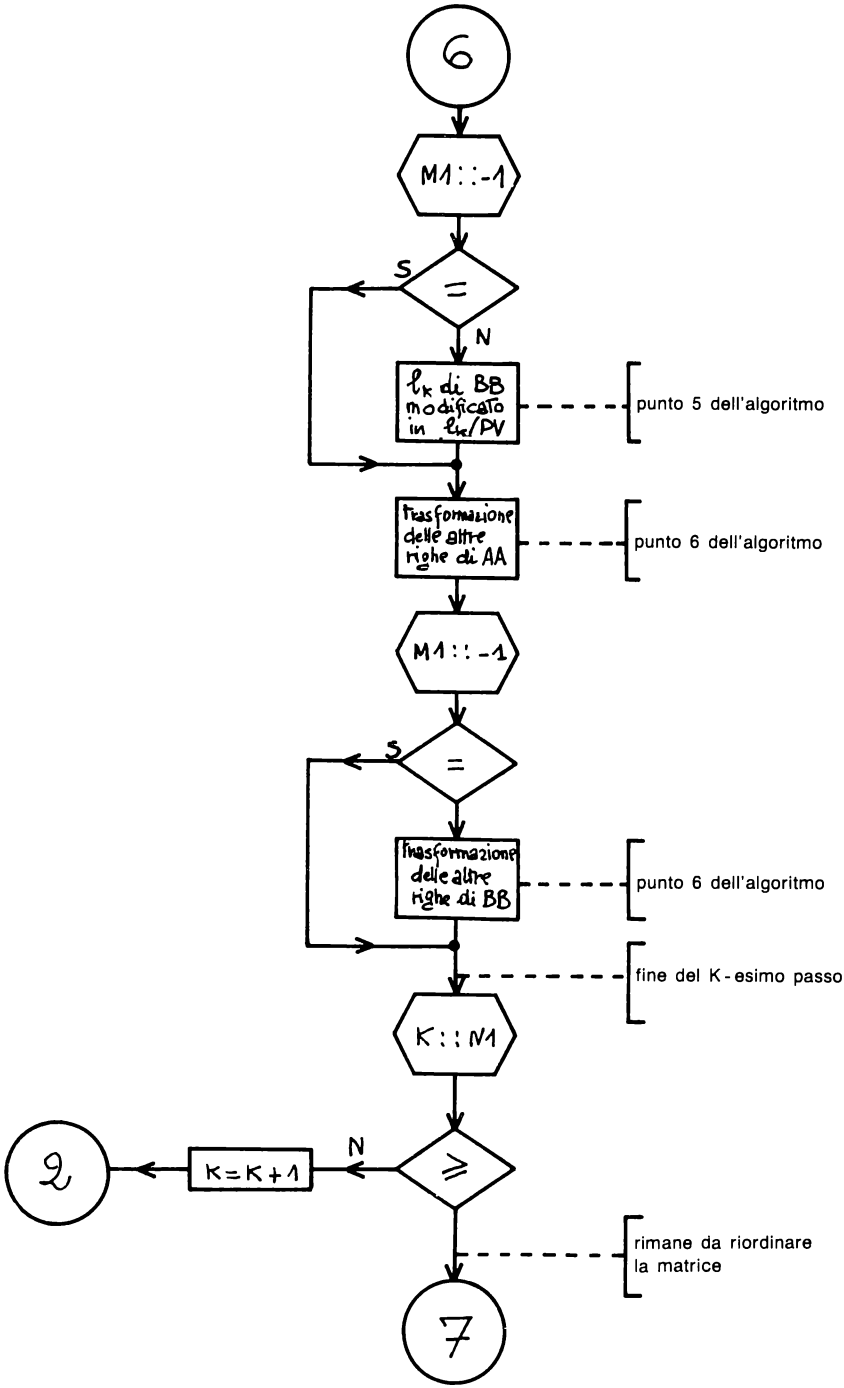


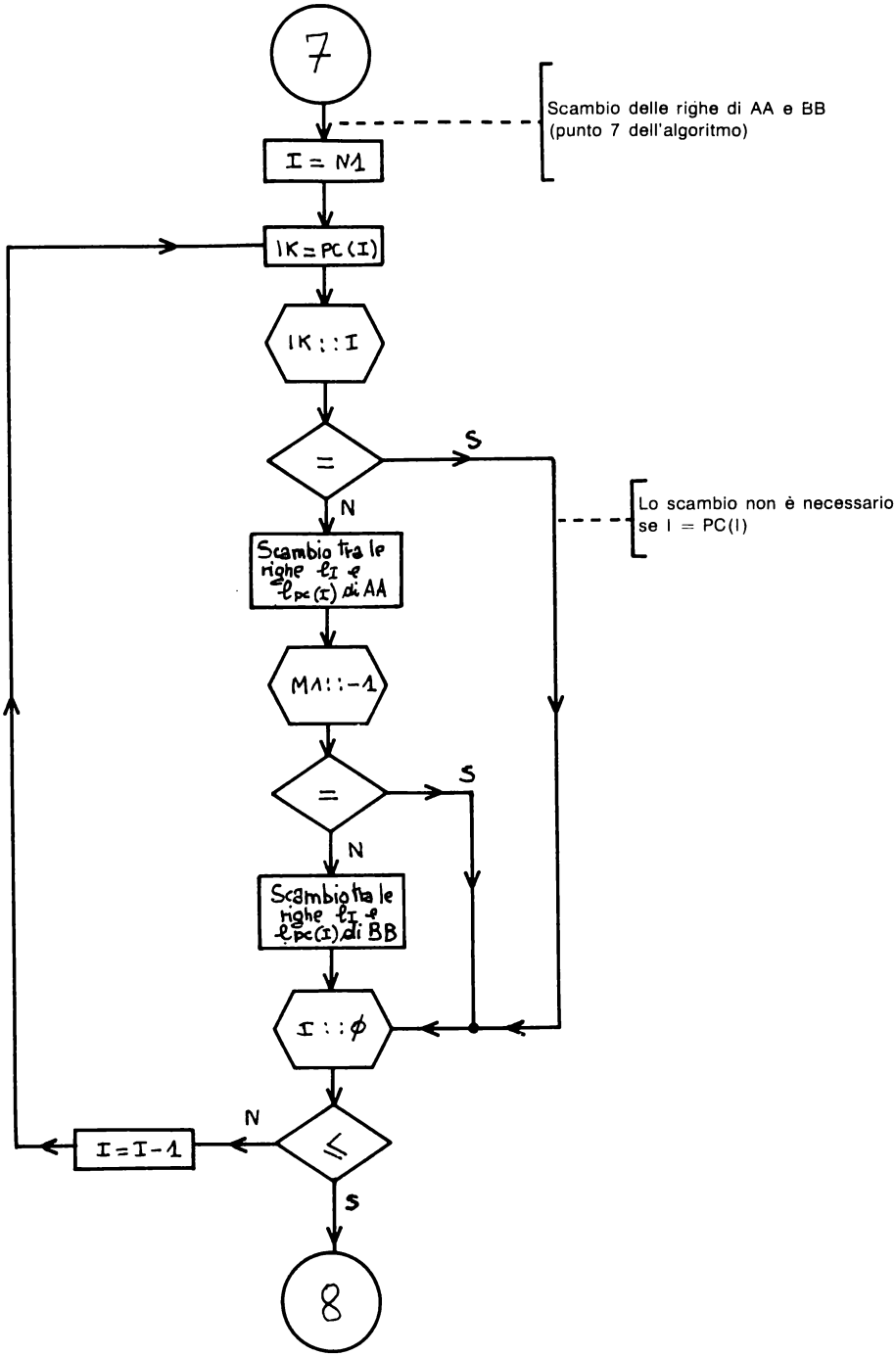

1
Colonne di A^{-1}
Stampa dell'inversa di A (memorizzata in AA)
M : : ϕ
S
=
N
Colonne di X
Stampa della matrice soluzione $X = A^{-1} B$ (memorizzata in BB)
DET
Stampa del valore del determinante di A
FINE

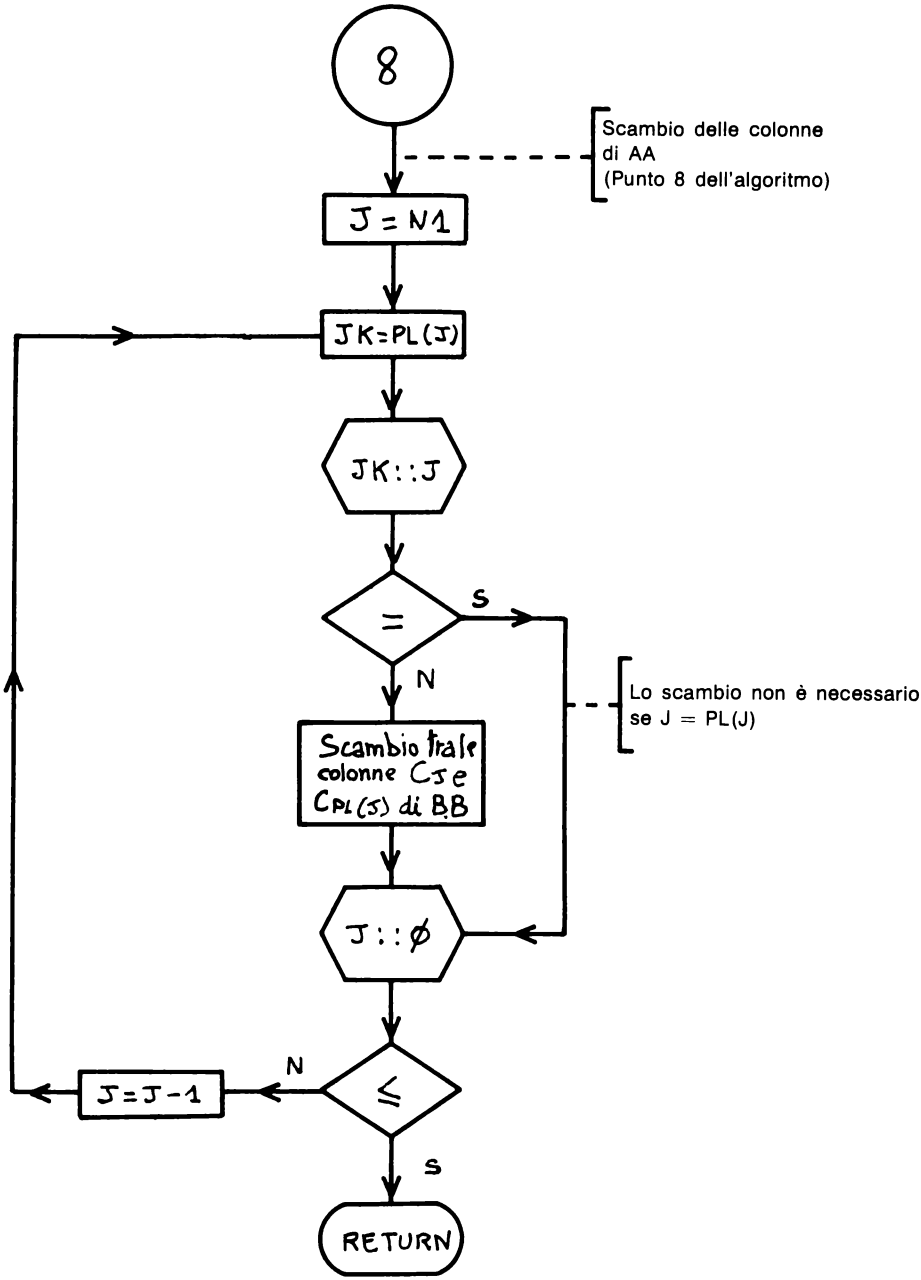

2000
Subroutine per il calcolo di
AA⁻¹, AA⁻¹, BB e determinante di RA
N1 = N⁻¹
M1 = M⁻¹
DET = 1
SI M1 = 1, non è definita
la matrice BB
K = 0
K = indice del passo
(k = 0, 1, ..., N1)
2
PV = AA(K, K)
IK = K
JK = K
PAV = |PV|
Pivot relativo al
K-esimo passo
I = K
J = K
|AA(I, J)|
:: PAV
S
PV = AA (I, J)
PAV = |PV|
IK = I
JK = J
N
J :: N1
N
J = J+1
S
I :: N1
N
I = I+1
S
PC (K) = JK
PL (K) = IK
Memorizzazione della
posizione del K-esimo pivot
3


3
Calcolo del determinante
IK::K
=
N
DET=
-DET
S
JK::K
=
N
DET=
-DET
S
DET=
DET*PV
DET::ϕ
=
O
messaggio
di errore
matrice
non invertibile
FINE
N
IK::K
=
S
4
Se IK = K non è necessario
lo scambio tra le righe
N
Scambio tra
le righe lk
e lIK di AA
M1::-1
=
N
5
S
4
non esiste
BB se M1 = – 1


5
Scambio tra le righe ℓ_K ed ℓ_{Ir} di BB
4
JK :: K
=
O
N
Scambio delle colonne c_K ed c_{JK} di BB
Se JK = K lo scambio delle colonne non è necessario
il pivot è posizionato in (K, K)
I = ϕ
CS(I)=AA(I,K)
AA(I,K) = ϕ
memorizzazione della colonna K di AA in CS(I) e azzeramento della stessa colonna di AA
I :: N1
≥
N
I = I+1
CS(K)=ϕ
AA(K,K)=1
AA(I,K) = I, K
Modifica della riga ℓ_K di AA in ℓ_K/PV
Punto 5 dell'algoritmo
6


6
M1::-1
S
=
N
l_K di BB modificato in l_K/PV
punto 5 dell'algoritmo
trasformazione delle altre righe di AA
punto 6 dell'algoritmo
M1::-1
S
=
trasformazione delle altre righe di BB
punto 6 dell'algoritmo
fine del K-esimo passo
K::N1
N
≥
K=K+1
2
rimane da riordinare la matrice
7


7
Scambio delle righe di AA e BB
(punto 7 dell'algoritmo)
I = N1
IK = PC(I)
IK :: I
=
S
N
Lo scambio non è necessario
se I = PC(I)
Scambio tra le
righe ℓ_I e
$\ell_{PC(I)}$ di AA
M1 :: -1
=
S
N
Scambio tra le
righe ℓ_I e
$\ell_{PC(I)}$ di BB
I :: ϕ
N
I = I - 1
≤
S
8


8
Scambio delle colonne di AA (Punto 8 dell'algoritmo)
J = N1
JK=PL(J)
JK::J
=
S
N
Lo scambio non è necessario se J = PL(J)
Scambio tra le colonne CJ e CPL(J) di BB
J::Ø
≤
N
J=J-1
S
RETURN

4 — PROGRAMMA

```
1  REM      RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE
2  REM            MATRICIALE AX=B.
3  REM
4  REM               AUTORE:H.HAUT
5  REM
6  REM
7  REM     DESCRIZIONE:
8  REM        IL PROGRAMMA PERMETTE DI RISOLVERE L'EQUAZIONE AX=B
9  REM        DOVE A E' UNA MATRICE (N,N)
10  REM       E B E' UNA MATRICE (N,M)
11  REM      IL PROGRAMMA CALCOLA
12  REM         - LA MATRICE SOLUZIONE X
13  REM         - L'INVERSA DI A
14  REM         - IL DETERMINANTE DI A
15  REM      SE M=0,SI CALCOLA SOLO LA MATRICE INVERSA E
16  REM      IL DETERMINANTE DI A
17  REM
18  REM  ************************************************
19  REM
20  REM
100  REM
110  REM   REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 8);"RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE"
150  PRINT  TAB( 11);"MATRICIALE AX=B"
160  PRINT : PRINT  TAB( 20);"AUTORE H.HAUT"
170  PRINT
180  PRINT "1.IL PROGRAMMA RISOLVE L'EQUAZIONE AX=B   OVE"
190  PRINT "      A = MATRICE (N,N)"
200  PRINT "      B = MATRICE (N,M)                    E CALCOLA:
                          LA MATRICE SOLUZIONE X                    L'INVE
     RSA E IL DETERMINANTE DI A"
210  PRINT "  SE M=0,SI CALCOLA SOLO LA MATRICE       INVERSA ED IL DETERM
     INANTE DI A"
220  PRINT
230  PRINT "2.INSERIRE POI I VALORI DI N E M"
240  PRINT
250  PRINT "3.IN SEGUITO INTRODURRE UNA DOPO          L'ALTRA LE COLONNE D
     ELLE MATRICI A E B"
260  VTAB (23): PRINT "PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE": GET A$
270  HOME
280  REM
290  REM   GESTIONE DEI DATI IN INPUT
300  REM
310  PRINT "DIMENSIONE DELLE MATRICI A(N,N) E B(N,M)"
320  INPUT "   N=";N
330  INPUT "   M=";M
340 N1 = N - 1:M1 = M - 1
350  REM
360  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
370  REM
380  DIM AA(N1,N1),PC(N1),PL(N1),CS(N1)
390  IF M = 0 THEN  GOTO 410
400  DIM BB(N1,M1)
410  REM
420  REM   ACQUISIZIONE NUOVI DATI
430  REM
440  REM
450  REM   INSERIMENTO DELLA MATRICE A
460  REM
470  PRINT
480  FOR I = 0 TO N1
```

```
490  PRINT "COLONNA ";I + 1;" DI A :"
500  FOR J = 0 TO N1
510  HTAB (5): INPUT AA(J,I)
520  NEXT J
530  PRINT
540  NEXT I
550  REM
560  REM   EVENTUALE INSERIMENTO DELLA MATRICE B
570  REM
580  IF M = 0 THEN  GOTO 670
590  HOME
600  FOR I = 0 TO M1
610  PRINT "COLONNA ";I + 1;" DI B :"
620  FOR J = 0 TO N1
630  HTAB (5): INPUT BB(J,I)
640  NEXT J
650  PRINT
660  NEXT I
670  REM
680  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
690  REM
700  GOSUB 2000
710  REM
720  REM   GESTIONE DEI RISULTATI
730  REM
740  CALL  - 198: REM   SEGNALE SONORO
750  REM
760  REM    STAMPA  DELLA MATRICE INVERSA DI A
770  REM
780  FOR I = 0 TO N1
790  HOME
800  PRINT "COLONNA ";I + 1;" DELL'INVERSA DI A:"
810  FOR J = 0 TO N1
820  HTAB (5): PRINT AA(J,I)
830  NEXT J
840  PRINT
850  PRINT "PREMERE RETURN PER CONTINUARE"
860  GET A$
870  IF  ASC (A$) = 13 THEN  GOTO 890
880  GOTO 860
890  NEXT I
900  REM
910  REM   STAMPA DELLA MATRICE X SE M>0
920  REM
930  FOR I = 0 TO M1
940  IF M = 0 THEN  GOTO 1050
950  HOME
960  PRINT "COLONNA ";I + 1;" DELLA MATRICE SOLUZIONE X"
970  FOR J = 0 TO N1
980  HTAB (5): PRINT BB(J,I)
990  NEXT J
1000  PRINT : PRINT "PREMERE RETURN PER CONTINUARE"
1010  GET A$
1020  IF  ASC (A$) = 13 THEN  GOTO 1040
1030  GOTO 1010
1040  NEXT I
1050  PRINT : PRINT : PRINT
1060  PRINT "IL DETERMINANTE DI A= ";DET
1070  END
2000  REM  ***********************************************
2010  REM   SOTTOPROGRAMMA D'INVERSIONE  DI MATRICE E DI
2020  REM   RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE MATRICIALE AA X = BB
2030  REM
2040  REM
2050  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
2060  REM
2070  REM     1.DEFINIZIONI:
```

```
2080  REM        NELL'EQUAZIONE AA X = BB,
2090  REM          AA=MATRICE N RIGHE,N COLONNE
2100  REM          BB=MATRICE N RIGHE,M COLONNE
2110  REM      2.DATI NECESSARI:
2120  REM        * N=DIMENSIONE DI AA
2130  REM        * M=NUMERO DI COLONNE DI BB
2140  REM        * AA MEMORIZZATA IN AA(I,J) (I,J=0,1,...,N-1)
2150  REM        * BB MEMORIZZATA IN BB(I,J) (I=0,1,...,N-1)
2160  REM                                    (J=0,1,...,M-1)
2170  REM           SE M=0 , BB NON DEVE ESSERE DEFINITA;
2180  REM           IN QUESTO CASO SI CALCOLA SOLO
2190  REM           L'INVERSA DI A E IL SUO DETERMINANTE
2200  REM      3.RISULTATI FORNITI:
2210  REM        * L'INVERSA DI AA SI TROVA IN AA(I,J)
2220  REM            (I,J=0,1,...,N-1)
2230  REM        * IL DETERMINANTE DI AA=DET
2240  REM        * SE M E' DIVERSO DA ZERO,LA MATRICE
2250  REM          SOLUZIONE X SI TROVA IN BB(I,J)
2260  REM           (I=0,1,...,N-1)
2270  REM           (J=0,1,...,M-1)
2280  REM      4.VARIABILI UTILIZZATE:
2290  REM       DET,I,IK,J,JK,K,N,N1,M,M1,PAV,PV,TT
2300  REM      5.VETTORI E MATRICI UTILIZZATI:
2310  REM       CS(N-1),PC(N-1),PL(N-1)
2320  REM       AA(N-1,N-1),BB(N-1,M-1)
2330  REM          SE M=0,BB NON VIENE UTILIZZATA
2340  REM  ***********************************************
2350  REM   INIZIALIZZAZIONE PER LA RICERCA
2360 N1 = N - 1:M1 = M - 1
2370 DET = 1: REM   INIZIALIZZAZIONE DEL DETERMINANTE
2380  REM    K=INDICE DEL PASSAGGIO EFFETTUATO
2390  FOR K = 0 TO N1
2400  REM
2410  REM   RICERCA DEL PIVOT
2420  REM
2430 PV = AA(K,K)
2440 IK = K:JK = K
2450 PAV =  ABS (PV)
2470  FOR I = K TO N1
2480  FOR J = K TO N1
2490  IF  ABS (AA(I,J))   PAV THEN PV = AA(I,J):PAV =  ABS (PV):IK = I:JK =
     J
2500  NEXT J
2510  NEXT I
2520  REM   RICERCA ULTIMATA, IL PIVOT E' PV NELLA POSIZIONE I=IK,J=JK
2530 PC(K) = JK:PL(K) = IK: REM  MEMORIZZAZIONE DELLA POSIZIONE DEL PIVOT

2540  REM
2550  REM   CALCOLO DEL DETERMINANTE
2560  REM
2570  IF IK     > K THEN DET =  - DET
2580  IF JK     > K THEN DET =  - DET
2590 DET = DET * PV
2600  REM
2610  REM  SE IL DETERMINANTE E' UGUALE A ZERO LA MATRICE NON E'INVERTIBI-
     LE
2620  REM   INVIO DI UN MESSAGGIO DI ERRORE
2630  REM
2640  IF DET = 0 THEN  HOME : CALL  - 198: PRINT "IL DETERMINANTE E' NULLO
     :NESSUNA SOLUZIONE": END
2650  REM
2660  REM   POSIZIONAMENTO DEL PIVOT IN K,K
2670  REM
2680  IF IK = K THEN  GOTO 2870: REM    IL PIVOT E' GIA' SULLA GIUSTA RIGA

2690  REM
2700  REM    SCAMBIO DELLE RIGHE IK E K DI AA
```

```
2710  REM
2720  FOR I = 0 TO N1
2730 TT = AA(IK,I)
2740 AA(IK,I) = AA(K,I)
2750 AA(K,I) = TT
2760  NEXT I
2770  REM
2780  REM   SCAMBIO DELLE RIGHE IK E K DI BB
2790  REM
2800  IF M1 =  - 1 THEN  GOTO 2870
2810  FOR I = 0 TO M1
2820 TT = BB(IK,I)
2830 BB(IK,I) = BB(K,I)
2840 BB(K,I) = TT
2850  NEXT I
2860  REM
2870  IF JK = K THEN  GOTO 3030: REM  IL PIVOT E' GIA' SULLA GIUSTA COLON-
     NA
2880  REM
2890  REM   SCAMBIO DELLE COLONNE JK E K DI AA
2900  REM
2910  FOR I = 0 TO N1
2920 TT = AA(I,JK)
2930 AA(I,JK) = AA(I,K)
2940 AA(I,K) = TT
2950  NEXT I
2960  REM
2970  REM   IL PIVOT E' POSIZIONATO IN K,K
2980  REM
2990  REM
3000  REM   MEMORIZZAZIONE DELLA COLONNA K DI AA NEL VETTORE CS
3010  REM   E AZZERAMENTO DELLA STESSA
3020  REM
3030  FOR I = 0 TO N1
3040 CS(I) = AA(I,K)
3050 AA(I,K) = 0
3060  NEXT I
3070  REM
3080 CS(K) = 0:AA(K,K) = 1
3090  REM
3100  REM
3110  REM   MODIFICA DELLA RIGA K DI AA
3120  REM
3130  FOR I = 0 TO N1
3140 AA(K,I) = AA(K,I) / PV
3150  NEXT I
3160  REM
3170  REM   MODIFICA DELLA RIGA K DI BB TRANNE CHE SE M=0
3180  REM
3190  IF M1 =  - 1 THEN  GOTO 3260
3200  FOR I = 0 TO M1
3210 BB(K,I) = BB(K,I) / PV
3220  NEXT I
3230  REM
3240  REM   MODIFICA DELLE ALTRE RIGHE DI AA
3250  REM
3260  FOR J = 0 TO N1
3270  IF J = K THEN  GOTO 3440: REM   NON SI MODIFICA LA RIGA K
3280  REM
3290  REM   MODIFICA DELLA RIGA J DI AA
3300  REM
3310  FOR I = 0 TO N1
3320 AA(J,I) = AA(J,I) - CS(J) * AA(K,I)
3330  NEXT I
3340  REM
3350  REM   MODIFICA DELLA RIGA J DI BB
3360  REM
```

```
3370  IF M1 =  - 1 THEN  GOTO 3440
3380  FOR I = 0 TO M1
3390 BB(J,I) = BB(J,I) - CS(J) * BB(K,I)
3400  NEXT I
3410  REM
3420  REM   LA RIGA J E' MODIFICATA
3430  REM
3440  NEXT J
3450  REM
3460  REM   FINE DEL PASSO K
3470  REM
3480  NEXT K
3490  REM
3500  REM   LA MATRICE E' INVERTITA
3510  REM
3520  REM   RIORDINAMENTO DELLA MATRICE
3530  REM
3540  REM
3550  REM    SCAMBIO DELLE RIGHE
3560  REM
3570  FOR I = N1 TO 0 STEP  - 1
3580 IK = PC(I)
3590  IF IK = I THEN  GOTO 3800
3600  REM
3610  REM   SCAMBIO DELLE RIGHE I E PC(I) DI AA
3620  REM
3630  FOR J = 0 TO N1
3640 TT = AA(I,J)
3650 AA(I,J) = AA(IK,J)
3660 AA(IK,J) = TT
3670  NEXT J
3680  REM
3690  REM   SCAMBIO DELLE RIGHE I E PC(I) DI BB
3700  REM
3710  IF M1 =  - 1 THEN  GOTO 3800
3720  FOR J = 0 TO M1
3730 TT = BB(I,J)
3740 BB(I,J) = BB(IK,J)
3750 BB(IK,J) = TT
3760  NEXT J
3770  REM
3780  REM    CAMBIO DELLA RIGA SUCCESSIVA
3790  REM
3800  NEXT I
3810  REM
3820  REM   SCAMBIO TRA LE COLONNE DI AA
3830  REM
3840  FOR J = N1 TO 0 STEP  - 1
3850 JK = PL(J)
3860  IF JK = J THEN  GOTO 3960: REM   SCAMBIO NON NECESSARIO
3870  REM
3880  REM   SCAMBIO DELLE COLONNE J E PL(J) DI AA
3890  REM
3900  FOR I = 0 TO N1
3910 TT = AA(I,J)
3920 AA(I,J) = AA(I,JK)
3930 AA(I,JK) = TT
3940  NEXT I
3950  REM   CAMBIO DELLA COLONNA SEGUENTE
3960  NEXT J
3970  REM
3980  REM   RIORDINAMENTO CONCLUSO
3990  REM
4000  RETURN
```

5 — ESEMPIO PRATICO

Si voglia risolvere l'equazione matriciale AX = B ove le matrici A (di dimensioni 6,6; N 6) e B (1 colonna; M = 1) sono date da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il programma fornisce la matrice inversa A^{-1}, la matrice soluzione X ed il determinante di A

```
 RUN
        RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE
           MATRICIALE AX=B

                    AUTORE H.HAUT

1.IL PROGRAMMA RISOLVE L'EQUAZIONE AX=B
  OVE
     A = MATRICE (N,N)
     B = MATRICE (N,M)
  E CALCOLA:
     LA MATRICE SOLUZIONE X
     L'INVERSA E IL DETERMINANTE DI A
  SE M=0,SI CALCOLA SOLO LA MATRICE
  INVERSA ED IL DETERMINANTE DI A

2.INSERIRE POI I VALORI DI N E M

3.IN SEGUITO INTRODURRE UNA DOPO
  L'ALTRA LE COLONNE DELLE MATRICI A E B

PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
DIMENSIONE DELLE MATRICI A(N,N) E B(N,M)

   N=6
   M=1

COLONNA 1 DI A :
    ?1
    ?1
    ?-1
    ?1
    ?-1
    ?1

COLONNA 2 DI A :
    ?0
    ?1
    ?1
    ?-1
    ?1
    ?-1
```

```
COLONNA 3 DI A :
     ?0
     ?0
     ?1
     ?1
     ?-1
     ?1

COLONNA 4 DI A :
     ?0
     ?0
     ?0
     ?1
     ?1
     ?-1

COLONNA 5 DI A :
     ?0
     ?0
     ?0
     ?0
     ?1
     ?1

COLONNA 6 DI A :
     ?1
     ?-1
     ?1
     ?-1
     ?1
     ?-1

COLONNA 1 DI B :
     ?1
     ?0
     ?1
     ?0
     ?1
     ?0


COLONNA 1 DELL'INVERSA DI A:
     .5
     0
     0
     0
     0
     .5

PREMERE RETURN PER CONTINUARE
COLONNA 2 DELL'INVERSA DI A:
     .25
     .5
     0
     0
     0
     -.25

PREMERE RETURN PER CONTINUARE
COLONNA 3 DELL'INVERSA DI A:
     -.125
     .25
     .5
     0
     0
     .125
```

```
PREMERE RETURN PER CONTINUARE
COLONNA 4 DELL'INVERSA DI A:
     .0625
     -.125
     .25
     .5
     0
     -.0625

PREMERE RETURN PER CONTINUARE
COLONNA 5 DELL'INVERSA DI A:
     -.03125
     .0625
     -.125
     .25
     .5
     .03125

PREMERE RETURN PER CONTINUARE
COLONNA 6 DELL'INVERSA DI A:
     .03125
     -.0625
     .125
     -.25
     .5
     -.03125

PREMERE RETURN PER CONTINUARE
COLONNA 1 DELLA MATRICE SOLUZIONE X
     .34375
     .3125
     .375
     .25
     .5
     .65625

PREMERE RETURN PER CONTINUARE


IL DETERMINANTE DI A= -32
```

tempo d'esecuzione: 9"
memoria richiesta: 7249 bytes (senza REM : 2484).

PROGRAMMA NUMERO 10

AUTOVALORI ED AUTOVETTORI DI UNA MATRICE REALE SIMMETRICA

Questo programma realizza la "diagonalizzazione" di una matrice reale simmetrica con il metodo iterativo di Jacobi.

Il calcolo viene arrestato o quando si è raggiunta la precisione richiesta o quando si è raggiunto il numero massimo di iterazioni (tale numero viene definito dall'utente all'inizio del programma).

1 — METODO NUMERICO

Sia $A = (a_{ij})$ la matrice reale simmetrica di ordine n da diagonalizzare. È noto che una tale matrice ammette degli autovalori e degli autovettori reali e che esiste una matrice ortogonale U che la diagonalizza, vale a dire che (posto U^T uguale alla matrice trasposta di U) soddisfa alla seguente condizione:

$$U^T A U = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & 0 & \\ & & \cdot & \\ & 0 & & \cdot \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

I valori μ_i rappresentano gli autovalori di A mentre gli autovettori corrispondenti sono dati dalle colonne della matrice U.

Dato che una trasformazione ortogonale conserva la norma della matrice (la norma è la somma dei quadrati di tutti gli elementi) si dovrà avere, dopo la diagonalizzazione:

$$\sum_i \mu_i^2 \quad = \quad \sum_{i,j} a_{ij}^2$$

Il principio su cui si basa il metodo Jacobi consiste nel considerare U come prodotto di rotazioni elementari.

Esprimendo la trasformazione U nella forma:

$$U = U_1 U_2 U_3 \ldots\ldots$$

si effettuano le trasformazioni U_i

$$A' = \ldots\ldots U_3^T U_2^T U_1^T A\, U_1\, U_2\, U_3 \ldots\ldots$$

finché la somma dei quadrati degli elementi diagonali di A' non approssima, con la precisione voluta, la norma di A.

Ricordiamo che una rotazione elementare U_r si rappresenta nel modo seguente:

$$U^{(ij)}{}_r = \begin{array}{c} \\ \\ \\

(3) $a'_{ii} = c^2 a_{ii} + 2sc\, a_{ij} + s^2 a_{jj}$

(4) $a'_{jj} - s^2 a_{ii} - 2sc\, a_{ij} + c^2 a_{jj}$

(5) $a'_{ij} = a'_{ji} = (c^2 - s^2)\, a_{ij} + cs\, (a_{jj} - a_{ii})$

Gli altri elementi rimangono inalterati.

La somma dei quadrati degli elementi posti sulla diagonale principale viene modificata eseguendo la sostituzione:

$$a'^2_{ii} + a'^2_{jj} = a^2_{ii} + a^2_{jj} + 2a^2_{ij}$$

Si sceglie allora l'angolo θ in modo da rendere nullo a'_{ij} e si procede così nell'iterazione fino a giungere alla diagonalizzazione di A.

I valori di $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ possono essere calcolati secondo la seguente legge:

(6) $$c = \cos(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{q}{p^2 + q^2}\right)}$$

(7) $$s = \sin(\theta) = \frac{p}{2\sqrt{p^2 + q^2}\cos(\theta)}$$

ove: $q = |b|$
$p = 2ba_{ij}/|b|$
$b = a_{ii} - a_{jj}$

Se $b = 0$ si ha:

$$c = 1/\sqrt{2} \text{ ed } s = \mathrm{sgn}(a_{ij})/\sqrt{2}$$

Riferimenti bibliografici: A2, B1, C4, D1, J1, L1, L2, S3.

2 — TECNICA DI PROGRAMMAZIONE

L'algoritmo può essere scomposto in quattro passi successivi:

1) Ad ogni iterazione si ricerca, tra gli elementi non disposti sulla diagonale principale, quello avente valore assoluto maggiore.

2) Si calcolano i parametri della rotazione $U^{(ij)}$ che permette di azzerare tale elemento [formule (6) e (7)].

3) Si effettua su A la trasformazione $U^{(ij)} T_{AU}{}^{(ij)}$ (cfr. formule da (1) a (5)) e si realizza la U con $UU^{(ij)}$.

4) Si termina l'iterazione quando si è ottenuta la precisione voluta.

Il programma è concepito in modo da permettere all'utente di definire un estremo superiore per il numero di iterazioni. Se dopo un tale numero di iterazioni non si è ancora ottenuto il risultato con la precisione voluta, si può richiedere di effettuare un numero di iterazioni supplementari.

Le principali variabili utilizzate nel programma sono:

$A_{(i,j)}$ = matrice reale simmetrica di ordine N
ER = precisione desiderata
NA = norma di A
ND = somma dei quadrati degli elementi della diagonale principale; l'iterazione ha termine quando $|1 - NA/ND| < ER$
IM = numero massimo di iterazioni volute
$U_{(i,j)}$ = matrice di diagonalizzazione, inizializzata con la matrice unità.

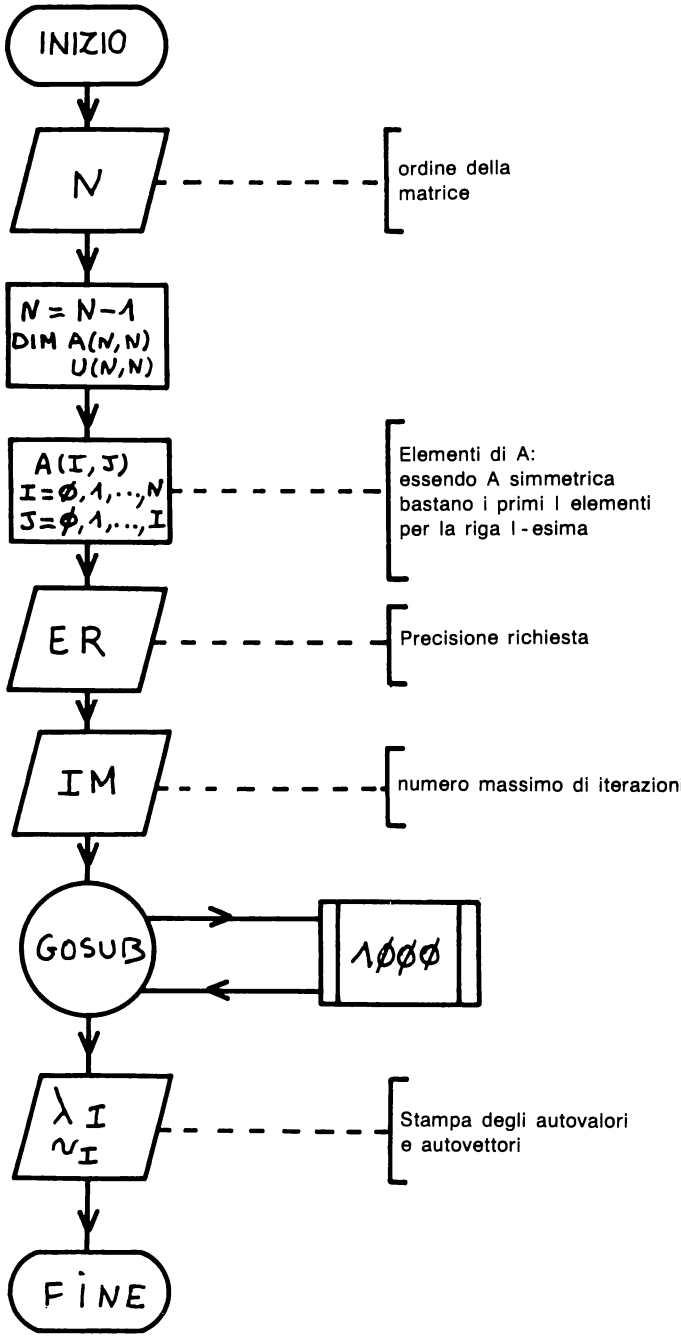
Alla fine del programma gli autovalori sono dati da:

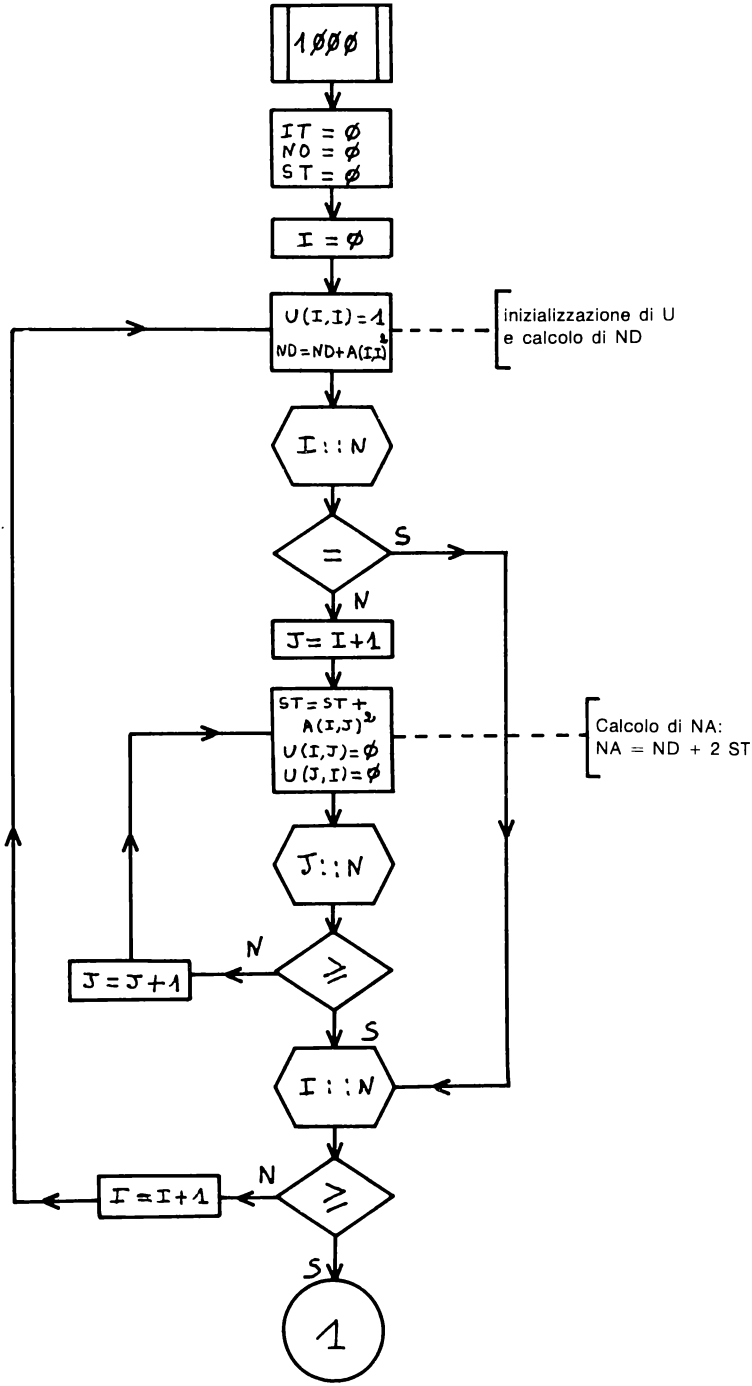
$$\mu_i = A(i,i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, N - 1)$$

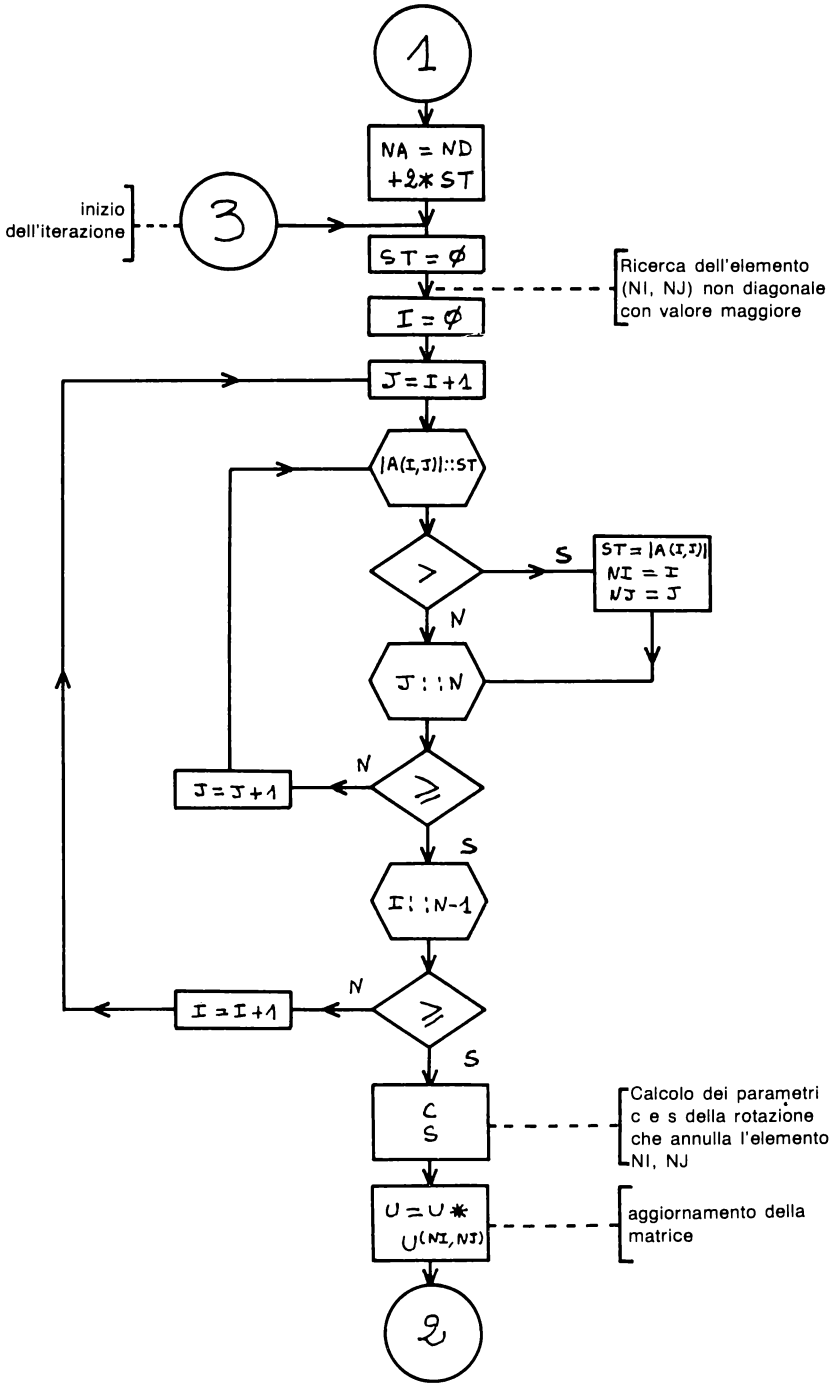
e gli autovettori corrispondenti da:

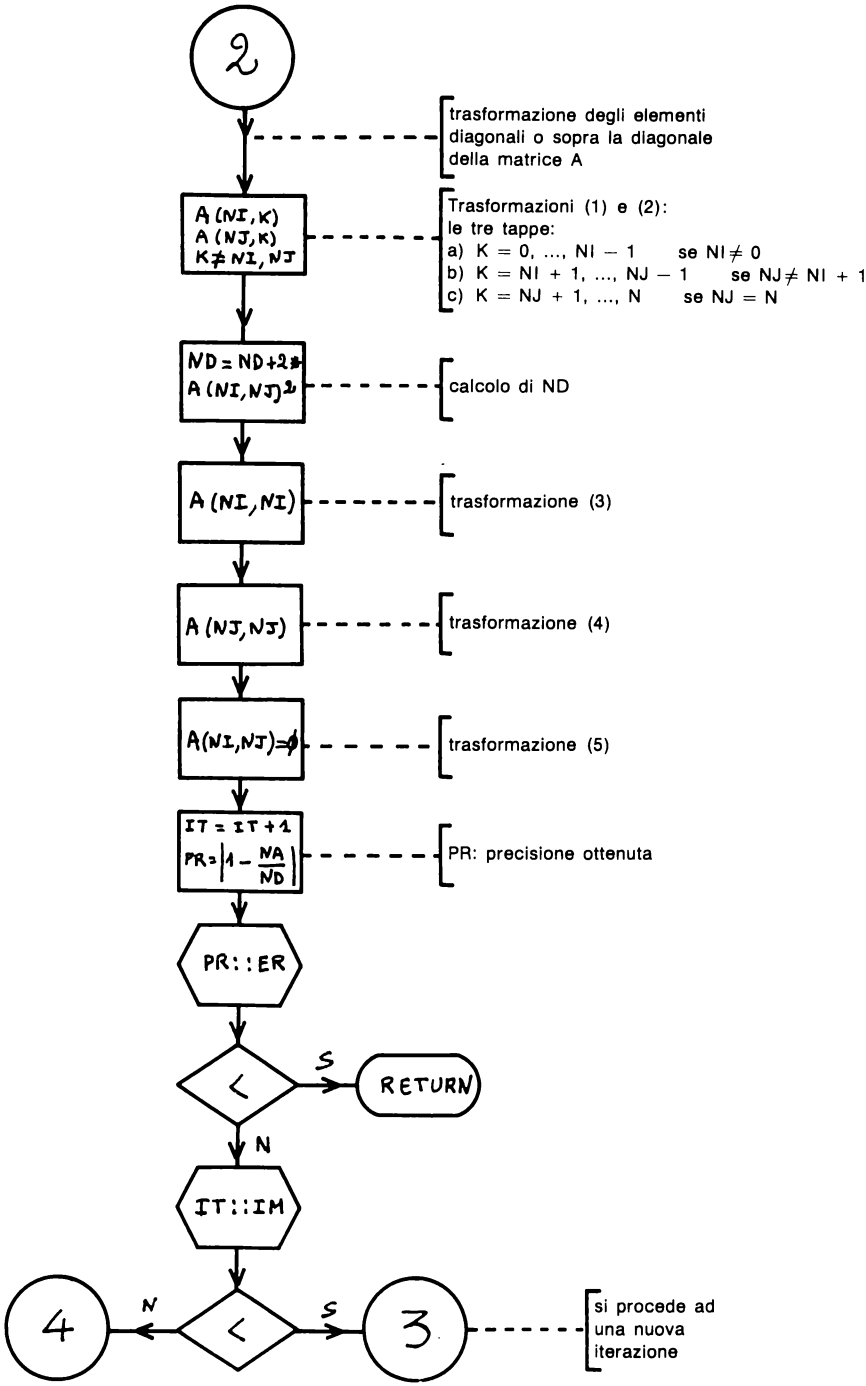
$$\vec{V_i} = [U(0,i), U(1,i), \ldots, U(N - 1,i)] \qquad (i = 0, 1, \ldots, N - 1)$$

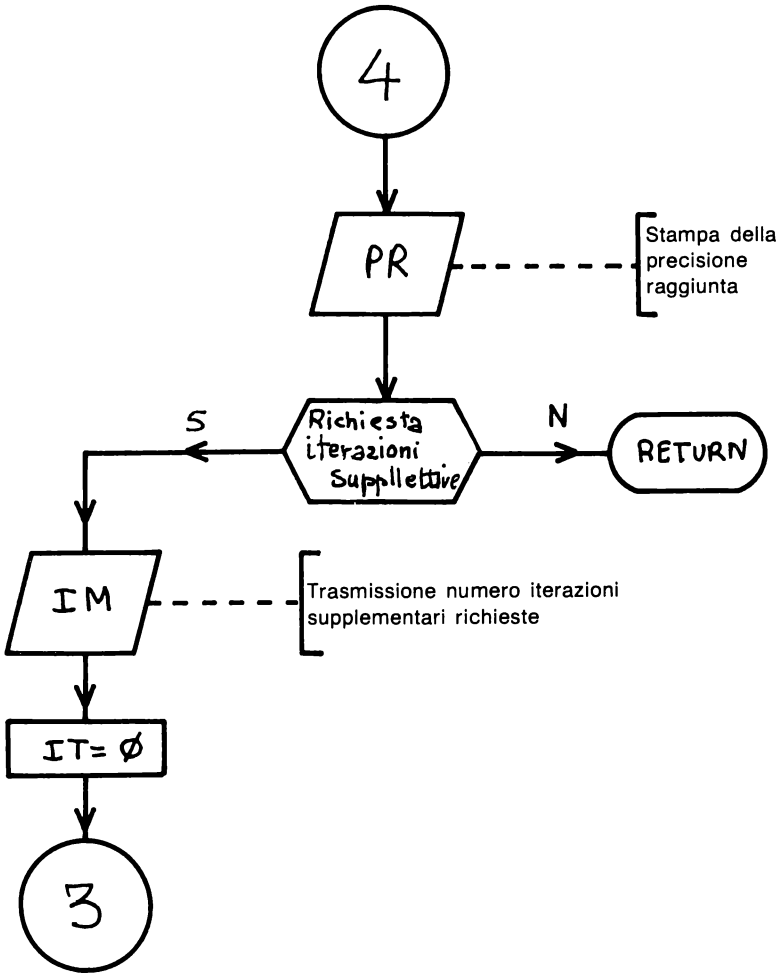
3 — DIAGRAMMA A BLOCCHI




1ØØØ
IT = Ø
NO = Ø
ST = Ø
I = Ø
U(I,I) = 1
ND = ND+A(I,I)²
inizializzazione di U
e calcolo di ND
I::N
=
S
N
J= I+1
ST = ST +
A(I,J)²
U(I,J) = Ø
U(J,I) = Ø
Calcolo di NA:
NA = ND + 2 ST
J::N
≥
N
J = J+1
S
I::N
≥
N
I = I+1
S
1


1
NA = ND
+2*ST
inizio
dell'iterazione
3
ST = Ø
Ricerca dell'elemento
(NI, NJ) non diagonale
con valore maggiore
I = Ø
J = I+1
|A(I,J)|::ST
>
S
ST = |A(I,J)|
NI = I
NJ = J
N
J::N
N
J = J+1
≥
S
I::N-1
N
I = I+1
≥
S
C
S
Calcolo dei parametri
c e s della rotazione
che annulla l'elemento
NI, NJ
U = U *
U(NI,NJ)
aggiornamento della
matrice
2


2
trasformazione degli elementi diagonali o sopra la diagonale della matrice A
A (NI, K)
A (NJ, K)
K ≠ NI, NJ
Trasformazioni (1) e (2):
le tre tappe:
a) K = 0, ..., NI − 1 se NI ≠ 0
b) K = NI + 1, ..., NJ − 1 se NJ ≠ NI + 1
c) K = NJ + 1, ..., N se NJ = N
ND = ND + 2 * A (NI, NJ)²
calcolo di ND
A (NI, NI)
trasformazione (3)
A (NJ, NJ)
trasformazione (4)
A(NI, NJ) = ϕ
trasformazione (5)
IT = IT + 1
PR = |1 − NA/ND|
PR: precisione ottenuta
PR::ER
<
S
RETURN
N
IT::IM
4
N
<
S
3
si procede ad una nuova iterazione


4
PR
Stampa della precisione raggiunta
Richiesta iterazioni supplettive
S
N
RETURN
IM
Trasmissione numero iterazioni supplementari richieste
IT= Ø
3

4 — PROGRAMMA

```
1  REM      CALCOLO DEGLI AUTOVALORI E AUTOVETTORI
2  REM         DI UNA MATRICE REALE SIMMETRICA
4  REM
5  REM                  AUTORE:H.HAUT
6  REM
7  REM
8  REM       DESCRIZIONE:
9  REM          QUESTO PROGRAMMA UTILIZZA IL METODO ITERATIVO
10  REM         DI JACOBI PER CALCOLARE GLI AUTOVALORI E GLI
11  REM         AUTOVETTORI DI UNA MATRICE REALE,SIMMETRICA
12  REM         CON LA PRECISIONE VOLUTA E ASSEGNANDO UN
13  REM         NUMERO MASSIMO DI ITERAZIONI
14  REM
15  REM  ***************************************************
16  REM
17  REM
100  REM
110  REM   REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 5);"CALCOLO DEGLI AUTOVALORI E DEGLI"
150  PRINT  TAB( 5);"AUTOVETTORI DI NA MATRICE "
160  PRINT  TAB( 11);"REALE SIMMETRICA. "
170  PRINT  TAB( 6);"(METODO ITERATIVO DI JACOBI)": PRINT
180  PRINT : PRINT  TAB( 24);"AUTORE:H.HAUT"
190  PRINT
200  PRINT "INSERIRE I SEGUENTI DATI:"
210  PRINT " 1.L'ORDINE DELLA MATRICE": PRINT
220  PRINT " 2.LE COLONNE UNA DOPO L'ALTRA              (LA MATRICE E' SIMM
     ETRICA E QUINDI       SONO NECESSARI SOLO I PRIMI TERMINI     DI OGNI
     COLONNA)"
230  PRINT
240  PRINT " 3.LA PRECISIONE VOLUTA"
250  PRINT
260  PRINT " 4.IL NUMERO MASSIMO DI ITERAZIONI"
270  VTAB (22): PRINT "PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE  ": GET A$
280  HOME
290  REM
300  REM    GESTIONE DEI DATI IN INPUT
310  REM
320  PRINT : INPUT "ORDINE DELLA MATRICE=";N
330 N = N - 1
340  REM
350  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
360  REM
370  DIM A(N,N),U(N,N)
380  REM
390  REM   PROSECUZIONE INSERIMENTO DATI
400  REM
410  FOR I = 0 TO N
420  PRINT : PRINT
430  PRINT "I ";I + 1;" PRIMI TERMINI DELLA COLONNA ";I + 1: PRINT "SONO:"

440  FOR J = 0 TO I
450  HTAB (6): INPUT A(J,I)
460  NEXT J
470  NEXT I
480  PRINT : PRINT : PRINT
490  INPUT "LA PRECISIONE VOLUTA=";ER
500  PRINT : PRINT
510  INPUT "IL NUMERO MASSIMO D'ITERAZIONI=";IM
520  REM
530  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
540  REM
```

```
 550  GOSUB 1000
 560  CALL  - 198
 570  REM
 580  REM   GESTIONE DEI RISULTATI
 590  REM
 600  HOME
 610  FOR I = 0 TO N
 620  PRINT : PRINT
 630  PRINT "AUTOVALORE ";I + 1;" = ";A(I,I): PRINT
 640  PRINT "AUTOVETTORE CORRISPONDENTE:"
 650  FOR J = 0 TO N
 660  HTAB (20): PRINT U(J,I)
 670  NEXT J
 680  PRINT : PRINT "PREMERE RETURN PER CONTINUARE"
 690  GET A$
 700  IF  ASC (A$)       13 THEN  GOTO 690
 710  NEXT I
 720  END
1000  REM  ******************************************
1010  REM   SOTTOPROGRAMMA PER IL CALCOLO DEGLI AUTOVALORI
1020  REM   ED AUTOVETTORI DI UNA MATRICE SIMMETRICA REALE
1030  REM   CON IL METODO ITERATIVO DI JACOBI
1040  REM
1050  REM
1060  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
1070  REM
1080  REM     1.DATI NECESSARI:
1090  REM       * LA MATRICE DA DIAGONALIZZARE MEMORIZZATA IN
1100  REM         A(I,J)  (I,J=0,1,...,N)
1110  REM       * N CHE DEFINISCE L'ORDINE DELLA MATRICE
1120  REM         ( N= ORDINE - 1  !!)
1130  REM       * ER=PRECISIONE VOLUTA
1140  REM       * IM=NUMERO MASSIMO DI ITERAZIONI
1150  REM     2.RISULTATI FORNITI:
1160  REM       * A(I,I) DA' L'I-ESIMO AUTOVALORE
1170  REM           (I=0,1,...,N)
1180  REM       * L'I-ESIMO AUTOVETTORE E' LA I-ESIMA
1190  REM         COLONNA DELLA MATRICE U:
1200  REM          (U(0,I),U(1,I),...,U(N,I))
1210  REM              I=0,1,...,N
1220  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
1230  REM       A$,B,C,ER,I,IM,J,K,N,NA,ND,NI,NJ
1240  REM       P,PR,Q,S,ST,TE
1250  REM     4.MATRICI UTILIZZATE:
1260  REM       A(N,N),U(N,N)
1270  REM          (NOTA: N=ORDINE-1)
1280  REM  ******************************************
1290  REM   INIZIALIZZAZIONE
1300 IT = 0
1310 NA = 0
1320 ND = 0
1330 ST = 0
1340  REM
1350  REM    CALCOLO DI ND,NA E INIZIALIZZAZIONE DELLA MATRICE U
1360  REM
1370  FOR I = 0 TO N
1380 U(I,I) = 1
1390 ND = ND + A(I,I) ^ 2
1400  IF I = N THEN  GOTO 1470
1410  FOR J = I + 1 TO N
1420 ST = ST + A(I,J) ^ 2: REM   SOMMA TRANSITORIA DEI QUADRATI DEGLI ELE-
     MENTI ESTERNI ALLA DIAGONALE
1430 U(I,J) = 0:U(J,I) = 0
1440  NEXT J
1450  NEXT I
1460  REM
1470 NA = ND + 2 * ST
```

```
1480  REM
1490  REM   RICERCA DELL'ELEMENTO (NON SULLA DIAGONALE) MAGGIORE IN VALORE
      ASSOLUTO
1500  REM
1510 ST = 0
1520  FOR I = 0 TO N - 1
1530  FOR J = I + 1 TO N
1540 TE =  ABS (A(I,J))
1550  IF TE > ST THEN ST = TE:NI = I:NJ = J
1560  NEXT J
1570  NEXT I
1580  REM
1590  REM   L'ELEMENTO CERCATO E' IN NI,NJ
1600  REM
1610  REM    CALCOLO DEI PARAMETRI DELLA ROTAZIONE
1620  REM
1630 B = A(NI,NI) - A(NJ,NJ)
1640  IF B = 0 THEN C = 1 /  SQR (2):S = C *  SGN (A(NI,NJ)): GOTO 1710: REM
        CASO PARTICOLARE CON B=0
1650 Q =  ABS (B):P = 2 * A(NI,NJ) *  SGN (B)
1660 ST =  SQR (P * P + Q * Q)
1670 C =  SQR ((1 + Q / ST) / 2):S = P / (2 * ST * C)
1680  REM
1690  REM   C=COS(ANGOLO DI ROTAZIONE):S=SIN(ANGOLO)
1700  REM
1710  REM   CALCOLO DELLA MATRICE U
1720  REM
1730  FOR K = 0 TO N
1740 ST = U(K,NI)
1750 U(K,NI) = C * ST + S * U(K,NJ)
1760 U(K,NJ) = C * U(K,NJ) - S * ST
1770  NEXT K
1780  REM
1790  REM   TRASFORMAZIONE DELLA MATRICE A
1800  REM
1810  REM
1820  REM   TRASFORMAZIONI  (1) E  (2) DEL TESTO
1830  REM   IN TRE TAPPE:
1840  REM      1.K=0,...,NI-1 SALVO SE NI=0
1850  REM      2.K=NI+1,...,NJ-1 SALVO SE NJ=NI+1
1860  REM      3.K=NJ+1,...,N SALVO SE NJ=N
1870  REM
1880  REM   PRIMA TAPPA
1890  REM
1900  IF NI = 0 THEN  GOTO 1960
1910  FOR K = 0 TO NI - 1
1920 ST = A(K,NI)
1930 A(K,NI) = C * ST + S * A(K,NJ)
1940 A(K,NJ) = C * A(K,NJ) - S * ST
1950  NEXT K
1960  REM
1970  REM   SECONDA TAPPA
1980  REM
1990  IF NJ = (NI + 1) THEN  GOTO 2050
2000  FOR K = NI + 1 TO NJ - 1
2010 ST = A(NI,K)
2020 A(NI,K) = C * ST + S * A(K,NJ)
2030 A(K,NJ) = C * A(K,NJ) - S * ST
2040  NEXT K
2050  REM
2060  REM   TERZA TAPPA
2070  REM
2080  IF NJ = N THEN  GOTO 2170
2090  FOR K = NJ + 1 TO N
2100 ST = A(NI,K)
2110 A(NI,K) = C * ST + S * A(NJ,K)
2120 A(NJ,K) = C * A(NJ,K) - S * ST
```

```
2130  NEXT K
2140  REM
2150  REM   CALCOLO DI ND
2160  REM
2170 ND = ND + 2 * A(NI,NJ) ^ 2
2180  REM
2190  REM   TRASFORMAZIONE (3) DEL TESTO
2200  REM
2210 ST = A(NI,NI)
2220 A(NI,NI) = C * C * ST + 2 * S * C * A(NI,NJ) + S * S * A(NJ,NJ)
2230  REM
2240  REM   TRASFORMAZIONE (4) DEL TESTO
2250  REM
2260 A(NJ,NJ) = C * C * A(NJ,NJ) + S * S * ST - 2 * S * C * A(NI,NJ)
2270  REM
2280  REM   TRASFORMAZIONE (5) DEL TESTO
2290  REM
2300 A(NI,NJ) = 0
2310  REM
2320 IT = IT + 1: REM   AGGIORNAMENTO DEL NUMERO DI ITERAZIONI
2330 PR =  ABS (1 - NA / ND): REM   CALCOLO DELLA PRECISIONE
2340  IF PR < ER THEN  RETURN : REM  IL CALCOLO E' TERMINATO CON LA PRECI-
     SIONE VOLUTA
2350  IF IT < IM THEN  GOTO 1510: REM PROSECUZIONE DELLA DIAGONALIZZAZIONE

2360  REM
2370  REM    IL NUMERO DI ITERAZIONI E' ULTIMATO: OPZIONE PER EFFETTUARNE
     ALTRE SUPPLEMENTARI
2380  REM
2390  CALL  - 198
2400  HOME : PRINT "IL NUMERO DI ITERAZIONI PERMESSE E'      RAGGIUNTO"
2410  PRINT "LA PRECISIONE OTTENUTA E' ";PR
2420  INPUT "VOLETE PROSEGUIRE?";A$
2430  IF A$ = "N" THEN  RETURN
2440  INPUT "NUMERO DI ITERAZIONI SUPPLEMENTARI=";IM
2450 IT = 0: REM  RIINIZIALIZZAZIONE DEL CONTATORE DI ITERAZIONI
2460  GOTO 1510: REM   PROSECUZIONE DELLA DIAGONALIZZAZIONE
```

5 — ESEMPIO PRATICO

L'esempio illustra la ricerca degli autovalori ed autovettori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

con una precisione di 1E — 10 ed un massimo di 10 iterazioni.

```
RUN
   CALCOLO DEGLI AUTOVALORI E DEGLI
   AUTOVETTORI DI NA MATRICE
         REALE SIMMETRICA.
    (METODO ITERATIVO DI JACOBI)


                         AUTORE:H.HAUT

INSERIRE I SEGUENTI DATI:
 1.L'ORDINE DELLA MATRICE

 2.LE COLONNE UNA DOPO L'ALTRA
   (LA MATRICE E' SIMMETRICA E QUINDI
```

```
   SONO NECESSARI SOLO I PRIMI TERMINI
   DI OGNI COLONNA)

 3.LA PRECISIONE VOLUTA

 4.IL NUMERO MASSIMO DI ITERAZIONI
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE

ORDINE DELLA MATRICE=3


I 1 PRIMI TERMINI DELLA COLONNA 1
SONO:
     ?4


I 2 PRIMI TERMINI DELLA COLONNA 2
SONO:
     ?2
     ?5


I 3 PRIMI TERMINI DELLA COLONNA 3
SONO:
     ?2
     ?1
     ?6


LA PRECISIONE VOLUTA=1E-10


IL NUMERO MASSIMO D'ITERAZIONI=10


AUTOVALORE 1 = 2.12592447

AUTOVETTORE CORRISPONDENTE:
                    .828033347
                    -.46965459
                    -.306243926

PREMERE RETURN PER CONTINUARE


AUTOVALORE 2 = 8.38761906

AUTOVETTORE CORRISPONDENTE:
                    .538678589
                    .514885452
                    .666872064

PREMERE RETURN PER CONTINUARE


AUTOVALORE 3 = 4.48645648

AUTOVETTORE CORRISPONDENTE:
                    -.155518984
                    -.717159353
                    .679335196

PREMERE RETURN PER CONTINUARE
```

tempo d'esecuzione: 6"8
memoria richiesta: 5636 bytes (senza REM : 2049)

PROGRAMMA NUMERO 11

CALCOLO DELLE FUNZIONI STATISTICHE PER UNA O DUE VARIABILI

Il programma permette di calcolare il valore delle varie funzioni statistiche sia per una variabile x, che assume i valori $[x_1, x_2, ..., x_n]$, sia per una coppia di variabili x,y che assumono i valori $[(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)]$.

1 — DESCRIZIONE DEL PROGRAMMA E DEL METODO

Le funzioni calcolate dal programma sono definite dalle formule seguenti:

1. media di x : $\bar{x} = (\Sigma x_i)/n$

2. media di y : $\bar{y} = (\Sigma y_i)/n$

3. scarto quadratico medio di x (divisione per n — 1):

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}{n - 1}}$$

4. scarto quadratico medio di y (divisione per n — 1):

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2 - n\bar{x}^2}{n - 1}}$$

5. scarto quadratico medio di x (divisione per n):

$$S'_x = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\ S_x$$

6. scarto quadratico medio di y (divisione per n):

$$S'_y = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\ S_y$$

7. scarto quadratico medio di $\bar{x}$ (divisione per n − 1):

$$S_{\bar{x}} = S_x/\sqrt{n}$$

8. scarto quadratico medio di $\bar{y}$ (divisione per n − 1):

$$S_{\bar{y}} = S_y/\sqrt{n}$$

9. scarto quadratico medio di $\bar{x}$ (divisione per n):

$$S'_{\bar{x}} = S'_x/\sqrt{n}$$

10. scarto quadratico medio di $\bar{y}$ (divisione per n):

$$S'_{\bar{y}} = s'_y/\sqrt{n}$$

11. covarianza di x,y (divisione per n − 1):

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1}\ (\Sigma x_i\, y_i - 1/n\ \Sigma x_i\ \Sigma y_i)$$

12. covarianza di x,y (divisione per n):

$$S_{xy} = 1/n\ (\Sigma x_i\, y_i - 1/n\ \Sigma x_i\ \Sigma y_i)$$

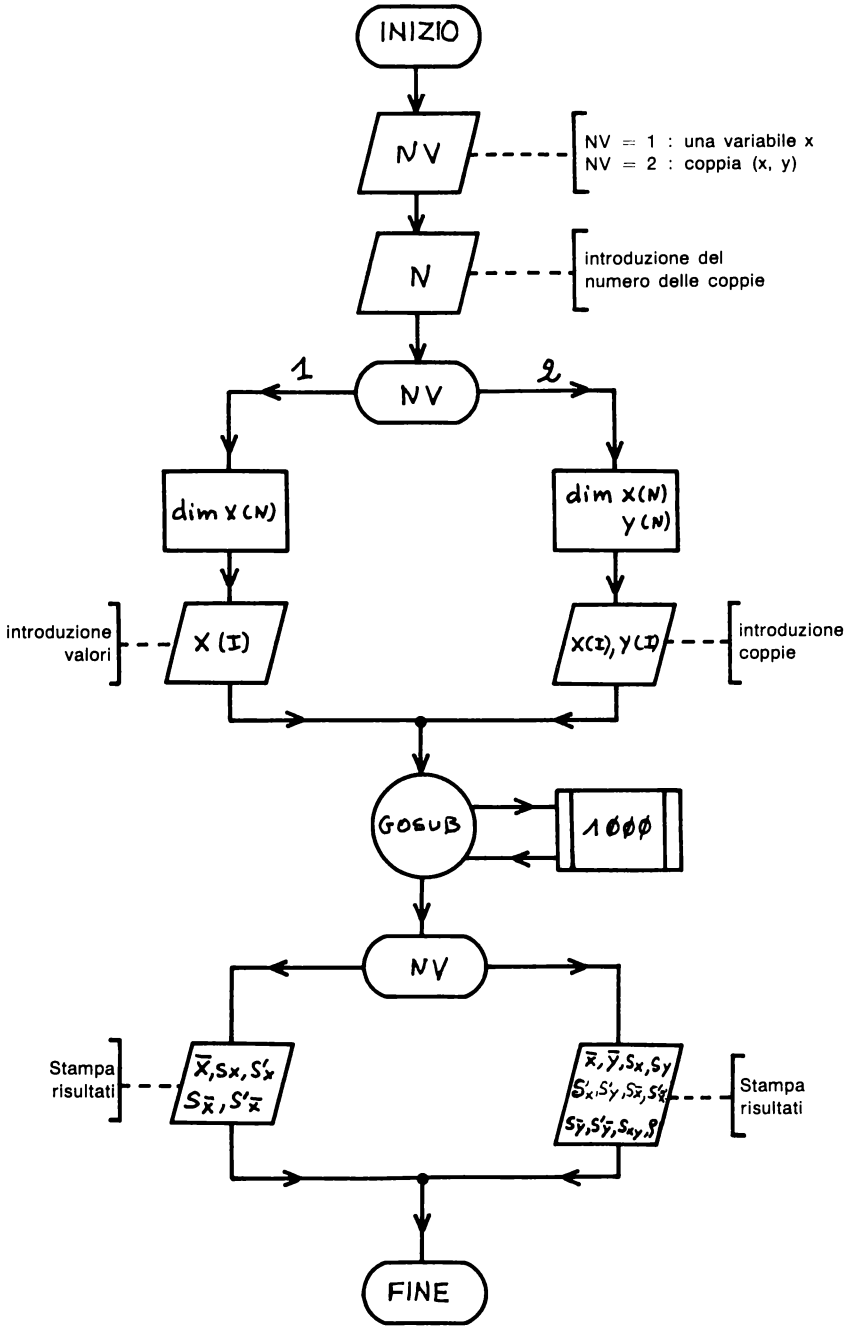
13. coefficiente di correlazione:

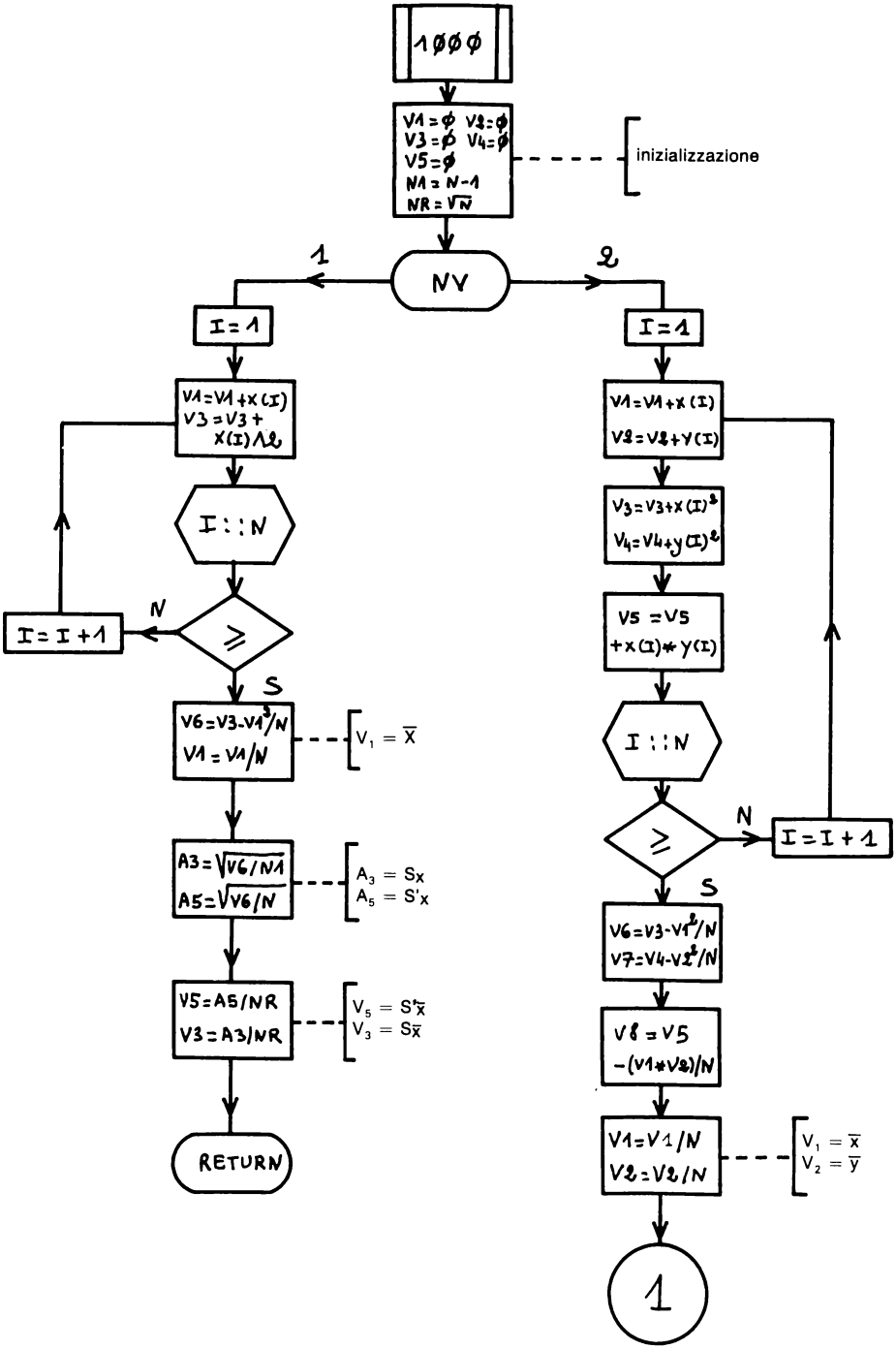
$$\rho = S_{xy}/S_x S_y$$

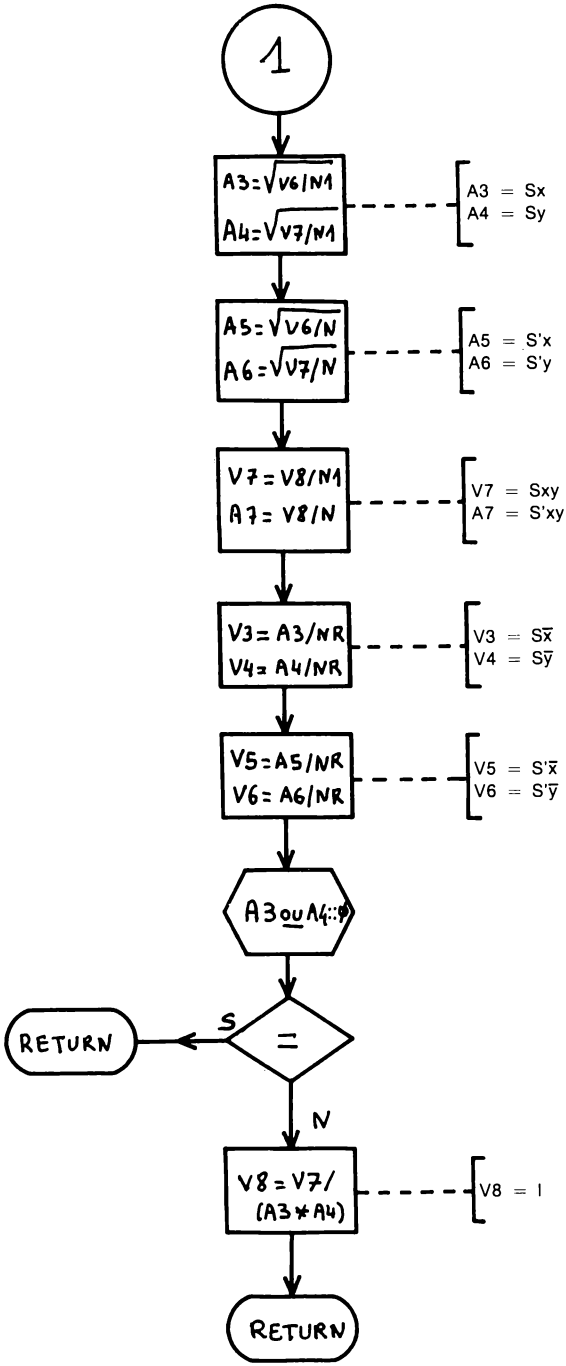
Man mano che i valori x_i ed y_i vengono trasmessi al calcolatore, vengono memorizzati nei due vettori X(I) e Y(I) di dimensione n. L'algoritmo segue rigorosamente le definizioni date e non presenta alcuna difficoltà.

Riferimenti bibliografici: J2, M1.

2 — DIAGRAMMA A BLOCCHI




1000
V1=0 V2=0
V3=0 V4=0
V5=0
N1=N-1
NR=√N
inizializzazione
NV
1
2
I=1
V1=V1+X(I)
V3=V3+X(I)↑2
I::N
N
I=I+1
S
V6=V3-V1↑2/N
V1=V1/N
V1 = X̄
A3=√(V6/N1)
A5=√(V6/N)
A3 = Sx
A5 = S'x
V5=A5/NR
V3=A3/NR
V5 = S*x̄
V3 = Sx̄
RETURN
I=1
V1=V1+X(I)
V2=V2+Y(I)
V3=V3+X(I)↑2
V4=V4+Y(I)↑2
V5=V5
+X(I)*Y(I)
I::N
N
I=I+1
S
V6=V3-V1↑2/N
V7=V4-V2↑2/N
V8=V5
-(V1*V2)/N
V1=V1/N
V2=V2/N
V1 = x̄
V2 = ȳ
1


1
A3=√V6/N1
A4=√V7/N1
A3 = Sx
A4 = Sy
A5=√V6/N
A6=√V7/N
A5 = S'x
A6 = S'y
V7=V8/N1
A7= V8/N
V7 = Sxy
A7 = S'xy
V3= A3/NR
V4= A4/NR
V3 = Sx̄
V4 = Sȳ
V5=A5/NR
V6= A6/NR
V5 = S'x̄
V6 = S'ȳ
A3 ou A4 ::0
=
S
RETURN
N
V8 = V7/
(A3*A4)
V8 = 1
RETURN

3 — PROGRAMMA

```
1  REM    CALCOLO DELLE FUNZIONI STATISTICHE
2  REM       PER UNA O DUE VARIABILI.
3  REM
4  REM                    AUTORE:H.HAUT
5  REM
6  REM
7  REM     DESCRIZIONE:
8  REM       IL PROGRAMMA PERMETTE DI CALCOLARE LE FUNZIONI
9  REM     STATISTICHE PARTENDO DA N VALORI DI UNA
10  REM    VARIABILE X O DI UNA COPPIA DI VARIABILI X,Y
12  REM
13  REM  ***************************************************
14  REM
15  REM
100  REM
110  REM     REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 3);"CALCOLO DELLE FUNZIONI STATISTICHE"
150  PRINT  TAB( 8);"PER UNA O DUE VARIABILI"
160  PRINT : PRINT  TAB( 20);"AUTORE:H.HAUT": PRINT : PRINT
170  PRINT "1.DEFINIRE IL TIPO DI CALCOLO:              1=FUNZIONI STATISTI
     CHE PER UN INSIE-      MEDI N VALORI X(I)                    2=FUNZIO
     NI STATISTICHE PER UN INSIE-      ME DI COPPIE (X(I),Y(I))"
180  PRINT
190  PRINT "2.INTRODURRE POI IL NUMERO DI VALORI      O DI COPPIE"
200  PRINT
210  PRINT "3.INTRODURRE SUCCESSIVAMENTE I DATI       SPERIMENTALI"
220  VTAB (21): PRINT "PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE  ": GET A$
230  HOME
240  REM
250  REM    GESTIONE DEI DATI IN INPUT
260  REM
270  INPUT "SCELTA DEL TIPO DI CALCOLO (1 O 2) ";NV
280  PRINT : INPUT "NUMERO DI VALORI O DI COPPIE: ";N
290  REM
300  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
310  REM
320  IF NV = 2 THEN  DIM Y(N)
330  DIM X(N)
340  REM
350  REM    INSERIMENTO DATI SPERIMENTALI
360  REM
370  HOME
380  FOR I = 1 TO N
390  PRINT I;" :"
400 CV =  PEEK (37): VTAB (CV): HTAB (6): INPUT "X=";X(I)
410  IF NV = 2 THEN  HTAB (6): INPUT "Y=";Y(I)
420  PRINT
430  NEXT I
440  REM
450  REM   CHIAMATA DELLA SUBROUTINE
460  REM
470  GOSUB 1000
480  REM
490  REM    GESTIONE DEI RISULTATI
500  REM
510  HOME
520  PRINT "MEDIA DI X =. ";V1
530  PRINT
540  PRINT "(N-1)SCARTO QUADRATICO DI X=";A3
550  PRINT "( N )SCARTO QUADRATICO DI X=";A5
560  PRINT
```

```
570  PRINT "(N-1)SCARTO QUADR. DI X MEDIO=";V3
580  PRINT "( N )SCARTO QUADR. DI X MEDIO=";V5
600  IF NV = 1 THEN  END
610  PRINT "MEDIA DI Y    =";V2
620  PRINT
630  PRINT "(N-1)SCARTO QUADRATICO DI Y=";A4
640  PRINT "( N )SCARTO QUADRATICO DI Y=";A6
660  PRINT "(N-1)SCARTO QUADR. DI Y MEDIO=";V4
670  PRINT "( N )SCARTO QUADR. DI Y MEDIO=";V6
680  PRINT
690  PRINT "(N-1) COVARIANZA DI X,Y = ";V7
700  PRINT "( N ) COVARIANZA DI X,Y = ";A7
710  PRINT : PRINT
720  PRINT "COEF.DI CORRELAZIONE = ";V8
730  END
1000  REM  ************************************************
1010  REM   SUBROUTINE PER IL CALCOLO DELLE FUNZIONI
1020  REM   STATISTICHE DI UNA O DUE VARIABILI
1030  REM
1040  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
1050  REM
1060  REM     1.DATI NECESSARI:
1070  REM       * NV=TIPO DI CALCOLO,
1080  REM          NV=1:FUNZIONI STATISTICHE PER UNA VARIABILE
1090  REM          NV=2:FUNZIONI STATISTICHE PER DUE VARIABILI
1100  REM       * N=NUMERO DI DATI SPERIMENTALI
1110  REM       * SE NV=1,
1120  REM           X(I) (I=1,...,N) SONO GLI N VALORI DELLA
1130  REM           VARIABILE
1140  REM       * SE NV=2,
1150  REM           (X(I),Y(I)) (I=1,...,N) SONO LE N COPPIE
1160  REM     2.RISULTATI FORNITI:
1170  REM       * V1=MEDIA DI X
1180  REM       * V2=MEDIA DI Y
1190  REM       * V3=(N-1) SCARTO QUADRATICO DI X MEDIO
1200  REM       * V4=(N-1) SCARTO QUADRATICO DI Y MEDIO
1210  REM       * V5=(N-1)SCARTO QUADRATICO DI Y MEDIO
1220  REM       * V6= (N) SCARTO QUADRATICO DI Y MEDIO
1230  REM       * V7=(N-1) COVARIANZA DI X,Y
1240  REM       * V8= COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE
1250  REM       * A3=(N-1) SCARTO QUADRATICO DI X
1260  REM       * A4=(N-1) SCARTO QUADRATICO DI Y
1270  REM       * A5= (N)  SCARTO QUADRATICO DI X
1280  REM       * A6= (N)  SCARTO QUADRATICO DI Y
1290  REM       * A7= (N)  COVARIANZA DI X,Y
1300  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
1310  REM      A3,A4,A5,A6,A7,I,N,N1,NV,NR,V1,V2,V3,V4,
1320  REM      V5,V6,V7,V8
1330  REM     4.VETTORI UTILIZZATI:
1340  REM      X(N),Y(N)
1350  REM  ************************************************
1360  REM
1370  REM   INIZIALIZZAZIONE
1380  REM
1390 V1 = 0:V2 = 0:V3 = 0
1400 V4 = 0:V5 = 0
1410 N1 = N - 1:NR =  SQR (N)
1420  REM
1430  REM   SCELTA RELATIVA AL TIPO DI CALCOLO
1440  REM
1450  ON NV GOTO 1460,1600
1460  REM
1470  REM   CALCOLO PER UNA VARIABILE
1480  REM
1490  FOR I = 1 TO N
1500 V1 = V1 + X(I)
1510 V3 = V3 + X(I) ^ 2
```

```
1520  NEXT I
1530 V6 = V3 - V1 * V1 / N
1540 V1 = V1 / N
1550 A3 =  SQR (V6 / N1)
1560 A5 =  SQR (V6 / N)
1570 V5 = A5 / NR
1580 V3 = A3 / NR
1590  RETURN
1600  REM
1610  REM   CALCOLO PER DUE VARIABILI
1620  REM
1630  FOR I = 1 TO N
1640 V1 = V1 + X(I)
1650 V2 = V2 + Y(I)
1660 V3 = V3 + X(I) ^ 2
1670 V4 = V4 + Y(I) ^ 2
1680 V5 = V5 + X(I) * Y(I)
1690  NEXT I
1700 V6 = V3 - V1 * V1 / N
1710 V7 = V4 - V2 * V2 / N
1720 V8 = V5 - (V1 * V2) / N
1730 V1 = V1 / N
1740 V2 = V2 / N
1750 A3 =  SQR (V6 / N1)
1760 A4 =  SQR (V7 / N1)
1770 A5 =  SQR (V6 / N)
1780 A6 =  SQR (V7 / N)
1790 V7 = V8 / N1
1800 A7 = V8 / N
1810 V3 = A3 / NR
1820 V4 = A4 / NR
1830 V5 = A5 / NR
1840 V6 = A6 / NR
1850  IF (A3 = 0) OR (A4 = 0) THEN  RETURN : REM   TEST SULL'ESISTENZA DEL
      COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE
1860 V8 = V8 / (N * A5 * A6)
1870  RETURN
```

4 — ESEMPIO PRATICO

Il programma viene utilizzato per il calcolo delle funzioni statistiche di due variabili x ed y che assumono i seguenti valori:

x =	1,	2,	3,	4,	5
y =	12,	9,	7,	15,	6

```
 RUN
  CALCOLO DELLE FUNZIONI STATISTICHE
       PER UNA O DUE VARIABILI

                    AUTORE:H.HAUT


1.DEFINIRE IL TIPO DI CALCOLO:
   1=FUNZIONI STATISTICHE PER UN INSIE-
     MEDI N VALORI X(I)
   2=FUNZIONI STATISTICHE PER UN INSIE-
     ME DI COPPIE (X(I),Y(I))
```

```
2.INTRODURRE POI IL NUMERO DI VALORI
  O DI COPPIE

3.INTRODURRE SUCCESSIVAMENTE I DATI
  SPERIMENTALI
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE
SCELTA DEL TIPO DI CALCOLO (1 O 2) 2

NUMERO DI VALORI O DI COPPIE: 5
1 :
     X=1
     Y=12

2 :
     X=2
     Y=9

3 :
     X=3
     Y=7

4 :
     X=4
     Y=15

5 :
     X=5
     Y=6

MEDIA DI X =  3

(N-1)SCARTO QUADRATICO DI X=1.58113883
( N )SCARTO QUADRATICO DI X=1.41421356

(N-1)SCARTO QUADR. DI X MEDIO=.707106782

( N )SCARTO QUADR. DI X MEDIO=.632455532

MEDIA DI Y   =9.8

(N-1)SCARTO QUADRATICO DI Y=3.70135111
( N )SCARTO QUADRATICO DI Y=3.31058908
(N-1)SCARTO QUADR. DI Y MEDIO=1.65529454

( N )SCARTO QUADR. DI Y MEDIO=1.48054045


(N-1) COVARIANZA DI X,Y = -1.5
( N ) COVARIANZA DI X,Y = -1.2


COEF.DI CORRELAZIONE = -.256307296
```

tempo d'esecuzione: 1''4
memoria richiesta: 3744 bytes (senza REM : 1584)

PROGRAMMA NUMERO 12

CALCOLO DELLE MEDIE E DEI MOMENTI DI UNA VARIABILE STOCASTICA

1 — DESCRIZIONE DEL METODO

Il programma realizzato permette di calcolare il valore delle medie e dei momenti relativi ad una variabile stocastica x che assume i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con frequenza $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Le medie ed i momenti sono definiti dalle formule:

— media aritmetica

$$A = 1/M\ \Sigma f_i\ x_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)\ M = \Sigma f_i$$

— media geometrica

$$G = (\Pi x_i^{f_i})^{1/M}$$

— media armonica

$$H = M / (\Sigma f_i / x_i)$$

— media generalizzata

$$M(t) = (1/M\ \Sigma f_i\ (x_i)^t)^{1/t}$$

— momenti

$$m1 = A$$
$$m2 = 1/M\ \Sigma f_i\ (x_i - A)^2$$
$$m3 = 1/M\ \Sigma f_i\ (x_i - A)^3$$
$$m4 = 1/M\ \Sigma f_i\ (x_i - A)^4$$

— coefficiente di appiattimento

$$AP = m4/(m2)^2$$

— coefficiente di asimmetria

$$AS = m3/(m2)^{3/2}$$

Si utilizzano le seguenti variabili:

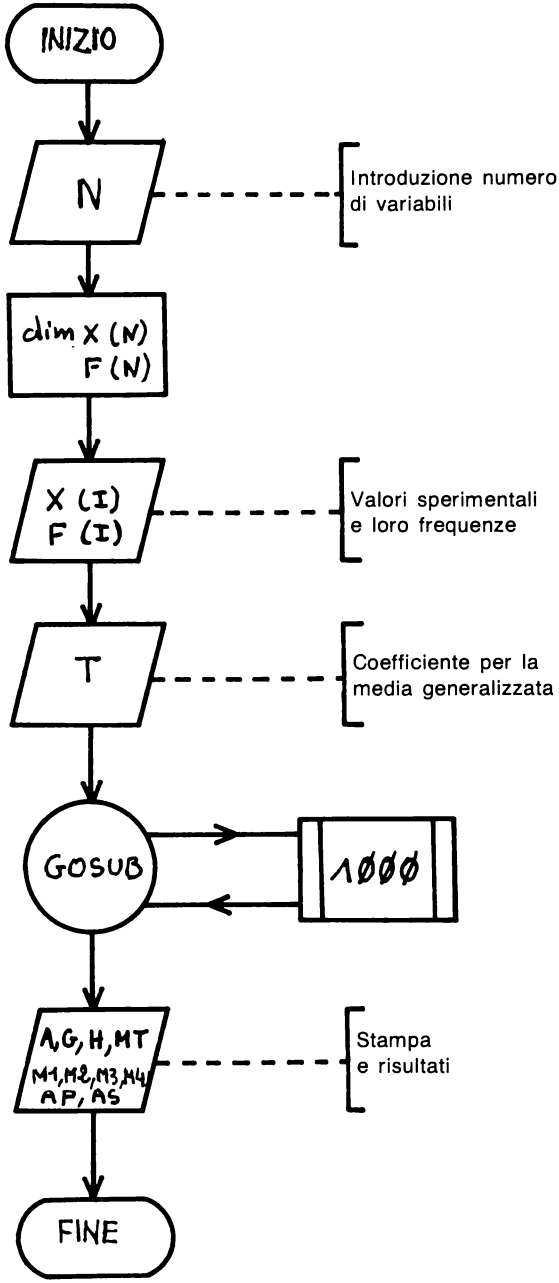
$$V1 = \Sigma f_i\ x_i$$
$$V4 = \Sigma\ f_i x_i^4$$
$$V7 = \Sigma\ f_i\ (x_i)^t$$
$$V2 = \Sigma\ f_i\ x_i^2$$
$$V5 = \Pi x_i^{f_i}$$
$$M = \Sigma\ f_i$$
$$V3 = \Sigma\ f_i\ x_i^3$$
$$V6 = \Sigma\ f_i/x_i$$

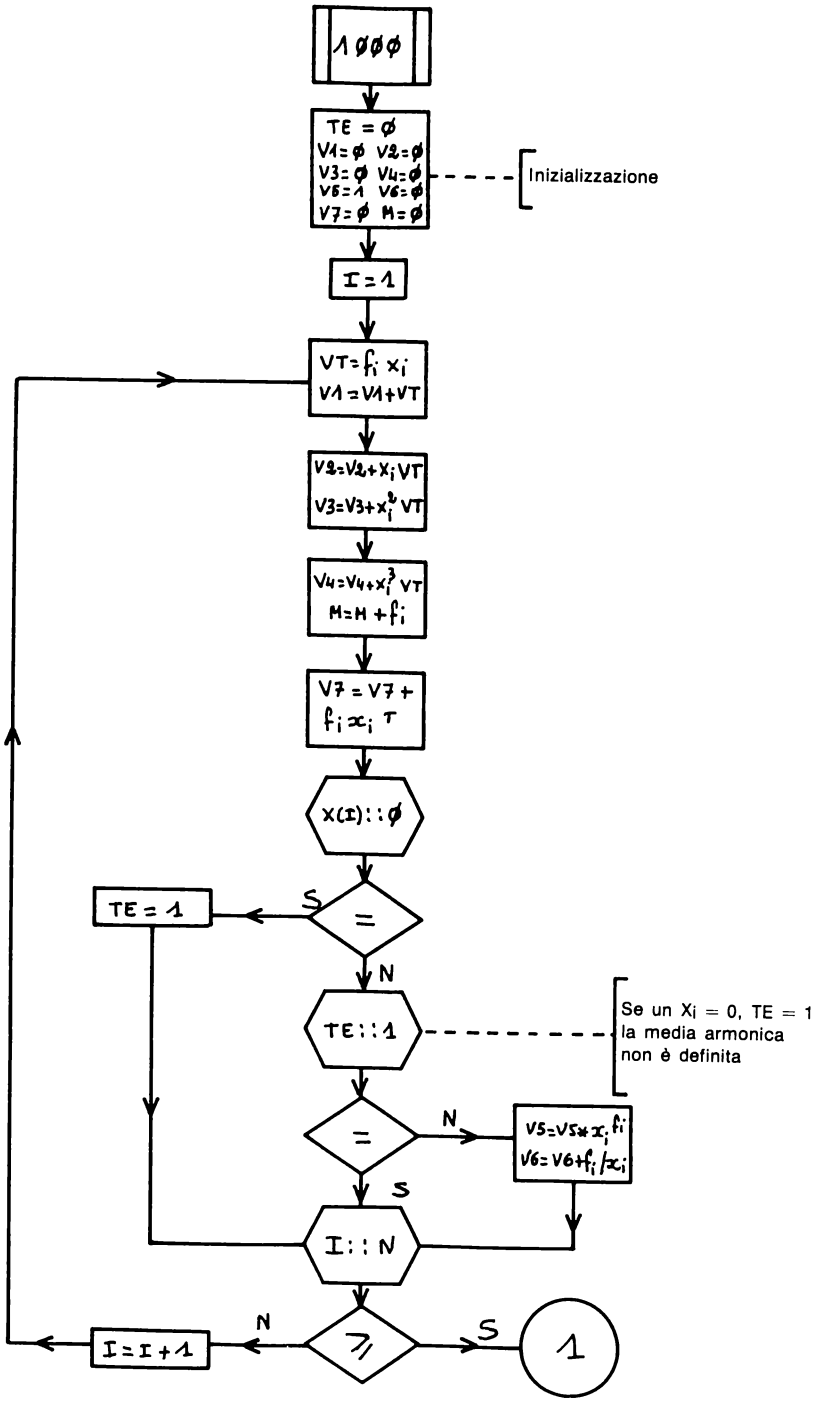
e si ottiene:

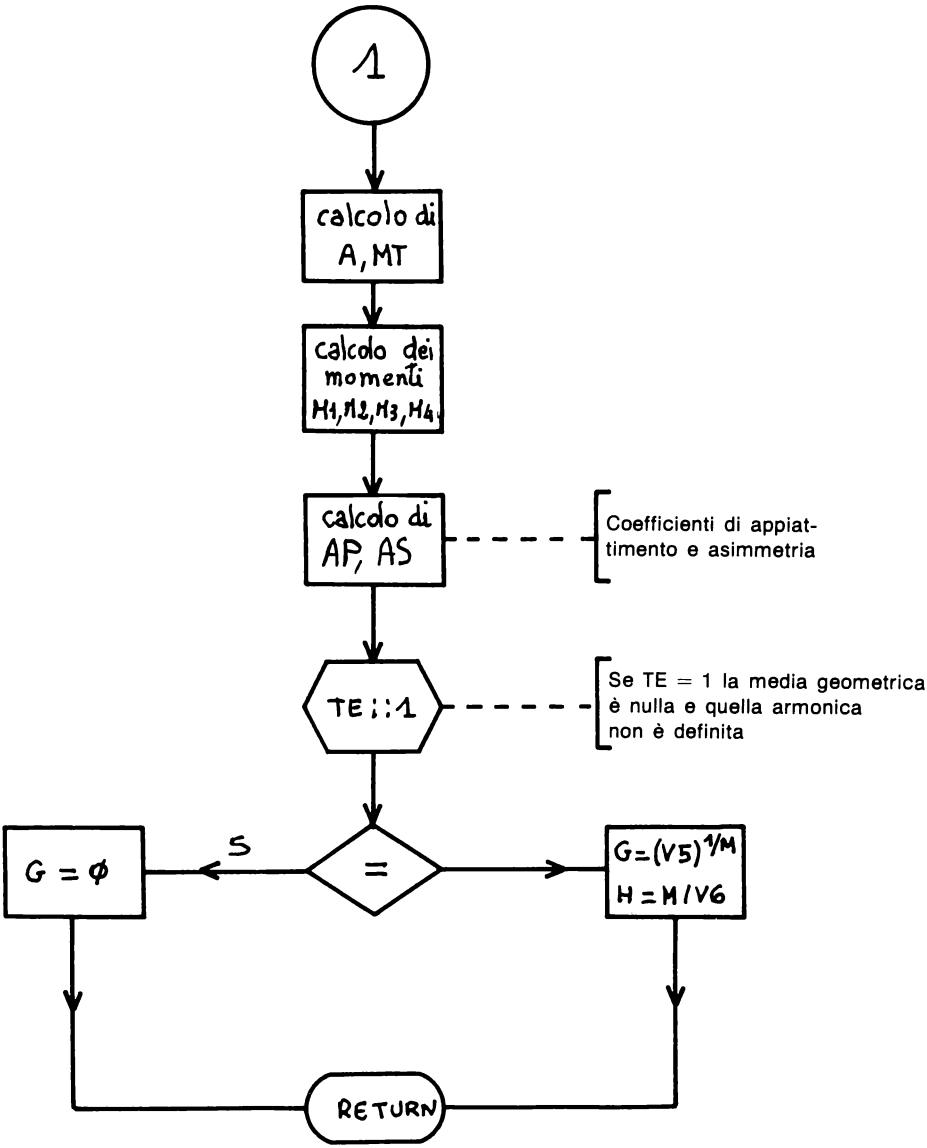
$$A = V1/M$$
$$G = (V5)^{1/M}$$
$$H = M/V6$$
$$M(t) = MT = (V7/M)^{1/t}$$
$$m2 = M2 = (V2 - 2 * A * V1 + A^2M)/M$$
$$m3 = M3 = (V3 - 3 * A * V2 + 3 * A^2V1 - A^3M)/M$$
$$m4 = M4 = (V4 + 4 * A * V3 + 6 * A^2V2 - 4 * A^3V1 + A^4M)/M$$

Nota: Se uno degli x_i è uguale a zero, la media geometrica è nulla e quella armonica non è definita.

2 — DIAGRAMMA A BLOCCHI




1000
TE = 0
V1=0 V2=0
V3=0 V4=0
V5=1 V6=0
V7=0 M=0
Inizializzazione
I=1
VT=fi xi
V1=V1+VT
V2=V2+Xi VT
V3=V3+xi² VT
V4=V4+xi³ VT
M=M+fi
V7=V7+
fi xi T
X(I)::0
=
S
TE=1
N
TE::1
Se un Xi = 0, TE = 1
la media armonica
non è definita
=
N
V5=V5*xi fi
V6=V6+fi/xi
S
I::N
≥
N
I=I+1
S
1


1
calcolo di A, MT
calcolo dei momenti M1, M2, M3, M4
calcolo di AP, AS
Coefficienti di appiattimento e asimmetria
TE ;:1
Se TE = 1 la media geometrica è nulla e quella armonica non è definita
=
S
G = φ
G=(V5)^1/M
H = M/V6
RETURN

3 — PROGRAMMA

```
1  REM          CALCOLO DELLE MEDIE
2  REM             E DEI MOMENTI.
3  REM
4  REM                      AUTORE:H.HAUT
5  REM
6  REM
7  REM      DESCRIZIONE:
8  REM        IL PROGRAMMA PERMETTE DI CALCOLARE LE VARIE
9  REM        MEDIE ED I MOMENTI DI UNA VARIABILE STATISTICA
10  REM       X PRENDENDO I VALORI  X(1),...,X(N) CON
11  REM       FREQUENZE F(1),...,F(N)
12  REM
13  REM  ****************************************************
14  REM
15  REM
100  REM
110  REM    REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 3);"CALCOLO DELLE MEDIE E DEI MOMENTI"
150  PRINT  TAB( 6);"DI UNA VARIABILE STATISTICA."
160  PRINT : PRINT  TAB( 20);"AUTORE:H.HAUT"
170  VTAB (9)
180  PRINT "1.DEFINIRE IL NUMERO DI VALORI            PER LA VARIABILE STA
     TISTICA"
190  PRINT
200  PRINT "2.INTRODURRE SUCCESSIVAMENTE I            VALORI E LE RELATIVE
      FREQUENZE"
210  VTAB (19): PRINT "PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE  ": GET A$
220  HOME
230  REM
240  REM    GESTIONE DEI DATI IN INPUT
250  REM
260  INPUT "NUMERO DI VALORI= ";N
270  REM
280  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
290  REM
300  DIM X(N),F(N)
310  REM
320  REM    INSERIMENTO DATI
330  REM
340  FOR I = 1 TO N
350  PRINT : PRINT I
360 CV =  PEEK (37): VTAB (CV)
370  HTAB (5): INPUT "X=";X(I)
380  HTAB (5): INPUT "F=";F(I)
390  NEXT I
400  PRINT : INPUT "CALCOLO DELLA MEDIA GENERALIZZATA M(T)  PER T= ";T
410  REM
420  REM    CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
430  REM
440  GOSUB 1000
450  REM
460  REM    GESTIONE DEI RISULTATI
470  REM
480  HOME
490  PRINT "MEDIA ARITMETICA = ";A
500  PRINT
510  PRINT "MEDIA GEOMETRICA = ";G: PRINT
520  IF TE = 1 THEN  PRINT "MEDIA ARMONICA NON DEFINITA": PRINT : GOTO 540

530  PRINT "MEDIA ARMONICA   = ";H: PRINT
540  PRINT "MOMENTI:"
```

```
550  PRINT "          M1=";M1
560  PRINT "          M2=";M2
570  PRINT "          M3=";M3
580  PRINT "          M4=";M4: PRINT
590  PRINT "COEF. D'APPIATTIMENTO=";AP: PRINT
600  PRINT "COEF. D'ASIMMETRIA   =";AS: PRINT
610  PRINT "MEDIA GENER. M(";T;")"; TAB( 22);"=";MT
620  END
1000  REM  ****************************************************
1010  REM  SOTTOPROGRAMMA PER IL CALCOLO DELLE MEDIE E DEI MOMENTI
1020  REM  DI UNA VARIABILE STATISTICA X
1030  REM
1040  REM  REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
1050  REM
1060  REM     1.DATI NECESSARI:
1070  REM       * N=NUMERO DI VALORI RELATIVI ALLA
1080  REM           VARIABILE STATISTICA X
1090  REM       * X(1),...,X(N) =VALORI SPERIMENTALI
1100  REM         PER LA VARIABILE X
1110  REM       * F(1),...,F(N) =FREQUENZE DI TALI VALORI
1130  REM       * T=COEFFICIENTE PER LA MEDIA GENERALIZZATA
1140  REM         DA CALCOLARE
1150  REM     2.RISULTATI FORNITI:
1160  REM       * A=MEDIA ARITMETICA
1170  REM       * G=MEDIA GEOMETRICA
1180  REM       * H=MEDIA ARMONICA
1190  REM       * M1,M2,M3,M4 = MOMENTI DI ORDINE 1,2,3,4
1200  REM       * AP=COEFFICIENTE DI APPIATTIMENTO
1210  REM       * AS=COEFFICIENTE DI ASIMMETRIA
1220  REM       * MT=MEDIA GENERALIZZATA M(T)
1230  REM       * TE= VARIABILE DI CONTROLLO: SE TE=1
1240  REM             LA MEDIA ARMONICA NON E' DEFINITA
1250  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
1260  REM      A,AP,AS,G,H,I,M,M1,M2,M3,M4,MT
1270  REM      N,T,TE,V1,V2,V3,V4,V5,V6,V7,VT
1280  REM     4.VETTORI UTILIZZATI:
1290  REM      F(N),X(N)
1300  REM  ****************************************************
1310  REM
1320  REM   INIZIALIZZAZIONI
1330  REM
1340 TE = 0
1350 V1 = 0:V2 = 0:V3 = 0:V4 = 0
1360 V5 = 1:V6 = 0:V7 = 0:M = 0
1370  REM
1380  REM   CALCOLO DELLE SOMMATORIE
1390  REM
1400  FOR I = 1 TO N
1410 VT = F(I) * X(I)
1420 V1 = V1 + VT
1430 V2 = V2 + VT * X(I)
1440 V3 = V3 + VT * X(I) ^ 2
1450 V4 = V4 + VT * X(I) ^ 3
1460 M = M + F(I)
1470 V7 = V7 + F(I) * X(I) ^ T
1480  IF X(I) = 0 THEN TE = 1: GOTO 1520: REM   TEST SUL VALORE DEGLI X(I)

1490  IF TE = 1 THEN  GOTO 1520: REM  SE UN X=0 LA MEDIA ARMONICA NON ESI-
     STE E QUELLA GEOMETRICA E' ZERO
1500 V5 = V5 * X(I) ^ F(I)
1510 V6 = V6 + F(I) / X(I)
1520  NEXT I
1530  REM
1540  REM   CALCOLO DELLE FUNZIONI
1550  REM
1560 A = V1 / M
1570 MT = (V7 / M) ^ (1 / T)
```

```
1580 M1 = A
1590 M2 = (V2 - 2 * A * V1 + A * A * M) / M
1600 M3 = (V3 - 3 * A * V2 + 3 * A * A * V1 - M * A ^ 3) / M
1610 M4 = (V4 - 4 * A * V3 + 6 * A * A * V2 - 4 * V1 * A ^ 3 + M * A ^ 4) /
     M
1620 AP = M4 / M2 / M2
1630 AS = M3 / (M2 ^ 1.5)
1640  IF TF = 1 THEN G = 0: RETURN : REM  IN X(I)=0
1650 G = (V5) ^ (1 / M)
1660 H = M / V6
1670  RETURN
```

4 — ESEMPIO PRATICO

Il calcolo è effettuato per le tre coppie di valori dato/frequenza: (1,6), (3,4), (5,8) utilizzando il coefficiente 2 per la media generalizzata.

```
 RUN
  CALCOLO DELLE MEDIE E DEI MOMENTI
     DI UNA VARIABILE STATISTICA.

                    AUTORE:H.HAUT
1.DEFINIRE IL NUMERO DI VALORI
  PER LA VARIABILE STATISTICA

2.INTRODURRE SUCCESSIVAMENTE I
  VALORI E LE RELATIVE FREQUENZE
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE
NUMERO DI VALORI= 3

1
    X=1
    F=6

2
    X=3
    F=4

3
    X=5
    F=8

CALCOLO DELLA MEDIA GENERALIZZATA M(T)
PER T= 2
MEDIA ARITMETICA = 3.22222222

MEDIA GEOMETRICA = 2.61023904

MEDIA ARMONICA   = 2.01492537

MOMENTI:
        M1=3.22222222
        M2=3.0617284
        M3=-1.16323733
        M4=12.5688157

COEF. D'APPIATTIMENTO=1.34079084

COEF. D'ASIMMETRIA   =-.217129252

MEDIA GENER. M(2)    =3.66666667
```

tempo d'esecuzione: 1"2
memoria richiesta: 3745 bytes (senza REM : 1584).

PROGRAMMA NUMERO 13

DISTRIBUZIONI STATISTICHE

Il programma è applicabile ad una qualsiasi delle sei distribuzioni statistiche seguenti: binomiale, di Poisson, normale, normale a due variabili, "chi quadro", t di Student.

Per la maggior parte di esse viene inoltre calcolata sia la funzione di densità di probabilità che quella di probabilità cumulata.

Riferimenti bibliografici: A1, G1, H2, J2, M1.

1 — DEFINIZIONI E METODI

1.1 — Distribuzione binomiale

a) Definizione

Sia p la probabilità favorevole per il verificarsi di un certo evento. La probabilità che tale evento si presenti x volte nel corso di N prove è data dalla legge binomiale:

$$P(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$$

ove

$$\binom{N}{x} = \frac{N!}{x!\,(N-x)!}$$

La funzione cumulativa di probabilità in x (vale a dire la probabilità di ottenere al più x successi) è data da:

$$\sum_{k=0}^{x} p(k)$$

b) Metodo

Si utilizza la formula di ricorrenza:

$$p(l) = \frac{N + 1 - l}{l} \quad \frac{p}{q} \; p(l - 1) \qquad l = 1, 2, \ldots, x$$

con $q = (1 - p)$ e $p(0) = q^N$

1.2 — Distribuzione di Poisson

a) Definizione

La funzione di densità di probabilità di una distribuzione di Poisson avente media μ è definita come:

$$p(x) = \frac{\mu^x}{x!} \; e^{-\mu}$$

e la funzione cumulativa è data:

$$\sum_{k=0}^{x} p(k)$$

b) Metodo

Si utilizza la formula di ricorrenza:

$$p(x) = \frac{\mu}{x} \; p\,(x - 1)$$

con

$$p(0) = e^{-\mu}$$

1.3 — Distribuzione normale

a) Definizione

La densità di probabilità relativa ad una distribuzione normale (di media μ e varianza σ^2) viene definita nel modo seguente:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; \frac{1}{\sigma} \; \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right. = Z\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

b) Metodo

La funzione cumulativa PX si ottiene nel modo seguente:

$$PX = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} Z(t) \; dt = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

utilizzando per il calcolo la funzione Q(y) definita con il seguente sviluppo:

$$Q(y) = Z(y) = [b_4 t + b_3 t^2 + b_2 t^3 + b_1 t^4 + b_0 t^5] + \varepsilon(x)$$

In questo sviluppo l'errore è limitato dalla condizione $[\varepsilon(x)] < 7.5 * 10^{-8}$ e i coefficienti t e b_i sono definiti tramite le formule seguenti:

$$t = 1/(1 + py) \qquad p = .2316419$$
$$b_0 = 1.330274429 \qquad b_1 = -1.821255978$$
$$b_2 = 1.781477937 \qquad b_3 = -.356563782 \qquad b_4 = .319381530$$

1.4 — Distribuzione normale a due variabili

Per questa distribuzione è stato previsto solo il calcolo della densità di probabilità per una coppia di valori delle variabili aleatorie x e y.

La funzione di densità viene definita nel modo seguente:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\Pi\sigma_x \sigma_y} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp - \left[\frac{\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma y}\right)^2}{2(1-\rho^2)} \right]$$

ove μ_x = media di x
σ_x^2 = varianza di x
μ_y = media di y
σ_y^2 = varianza di y
ρ = coefficiente di correlazione tra x e y

1.5 — Distribuzione "chi quadro"

a) Definizione

La funzione di densità relativa alla distribuzione "chi quadro" a V gradi di libertà, è definita come:

$$FX = f(x \mid v) = \frac{1}{2^{v/2}\,\Gamma(v/2)} e^{-x/2} x\left(\frac{v}{2} - 1\right) \qquad (x > 0)$$

La funzione cumulativa di probabilità si può ottenere tramite il seguente sviluppo in serie:

$$PX = \int_0^x f(x \mid \nu)\, d\nu = P(x \mid \nu) =$$

$$(x/2)^{\nu/2} \frac{e^{-x/2}}{\Gamma\ (\nu/2 + 1)} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{(\nu + 2)\ (\nu + 4)\ \ldots\ (\nu + 2r)}\right)$$

b) Metodo

Si calcola dapprima F $(\nu/2)$ che, a seconda che ν sia pari o dispari, è dato da:

$$\text{se } \nu = 2n \qquad \Gamma\ (\nu/2) = 1.2.3 \ldots\ldots (n - 1)$$

$$\text{se } \nu = 2n + 1, \qquad (\nu/2) = 1/2.3/2.5/2 \ldots\ldots \frac{2n-1}{2} \sqrt{\pi}$$

Si utilizza poi questo sviluppo per calcolare PX, troncando la serie quando il termine n-esimo risulta inferiore a 10^{-8}.

1.6 — Distribuzione t di Student

a) Definizione

La densità di probabilità relativa alla distribuzione di Student a ν gradi di libertà è definita come:

$$f(x \mid \nu) = \frac{[(\nu - 1)/2]!}{\sqrt{\pi\nu}\ [(\nu - 2)/2]\ !} (1 + x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$$

Si definisce poi come probabilità che la variabile aleatoria x assuma un valore più piccolo di t (in valore assoluto):

$$FX = \text{Prob}\ (|x| \leq t) = A(t \mid \nu) = \int_{-t}^{t} f(x \mid \nu)\ dx$$

La funzione cumulativa di probabilità risulta pertanto data da:

$$PX = \text{Prob}\ (x \leq t) = \frac{1 + A(t \mid \nu)}{2}$$

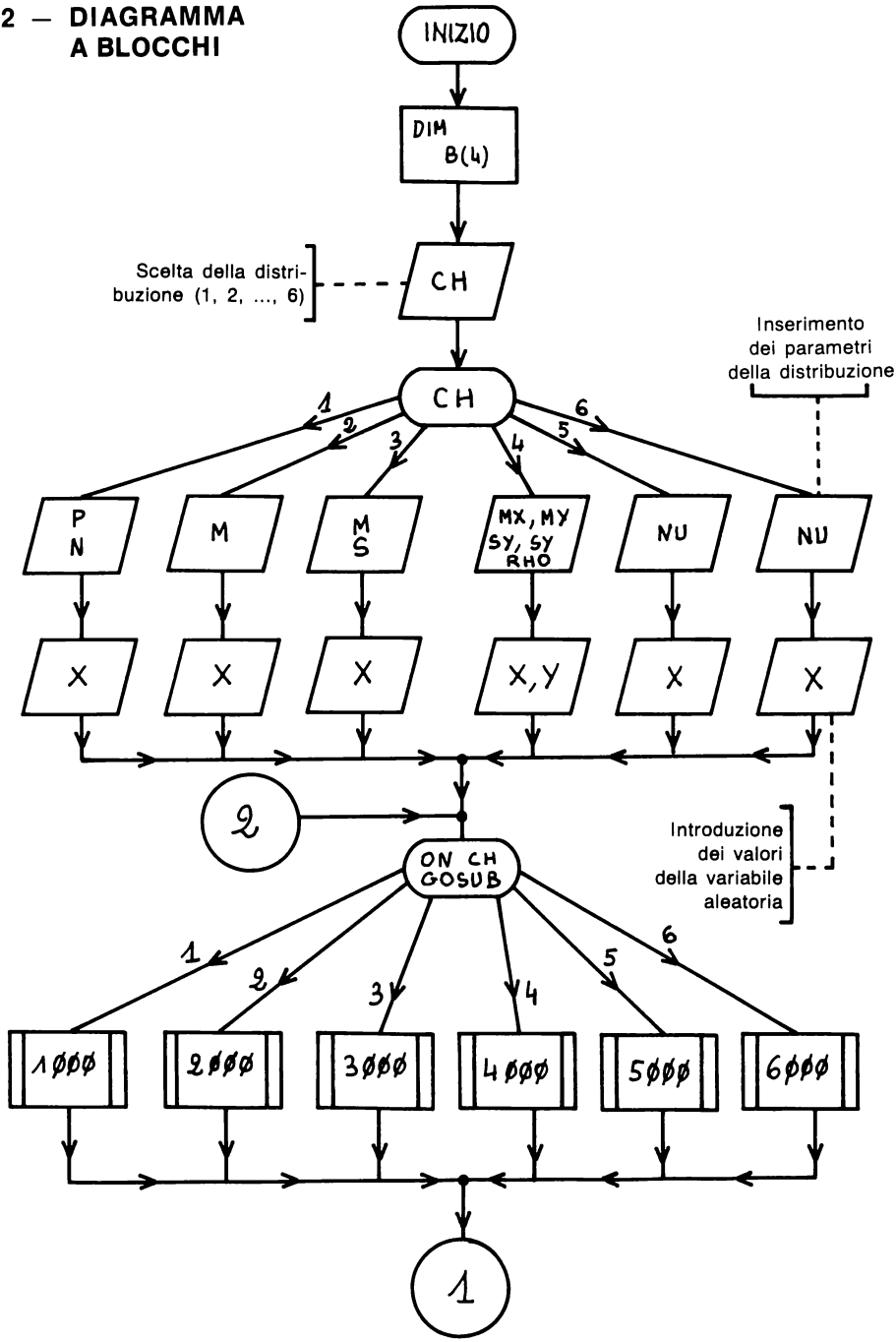
b) Metodo

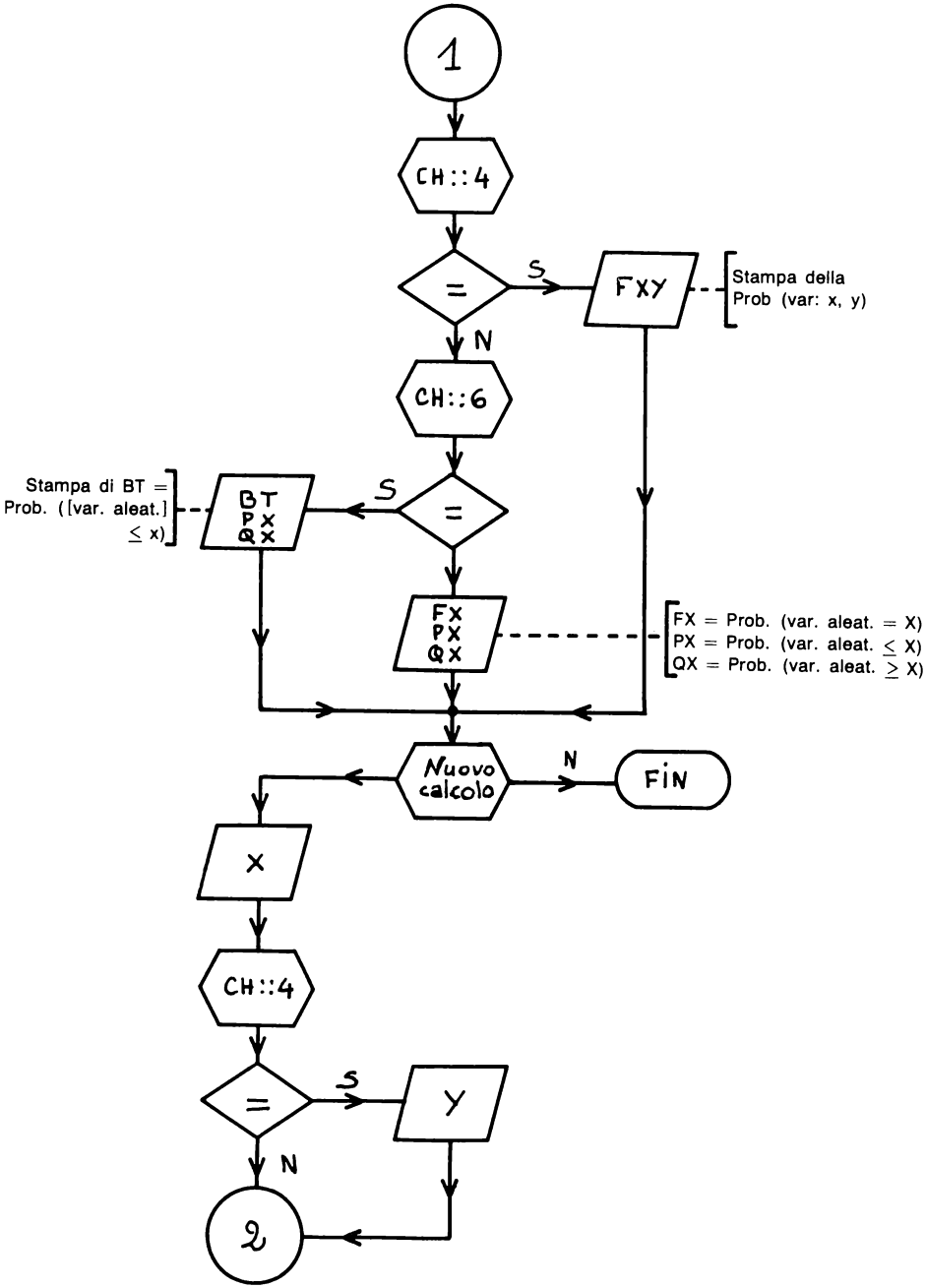
La funzione $A(t \mid \nu)$ può essere calcolata tramite il seguente sviluppo in serie:

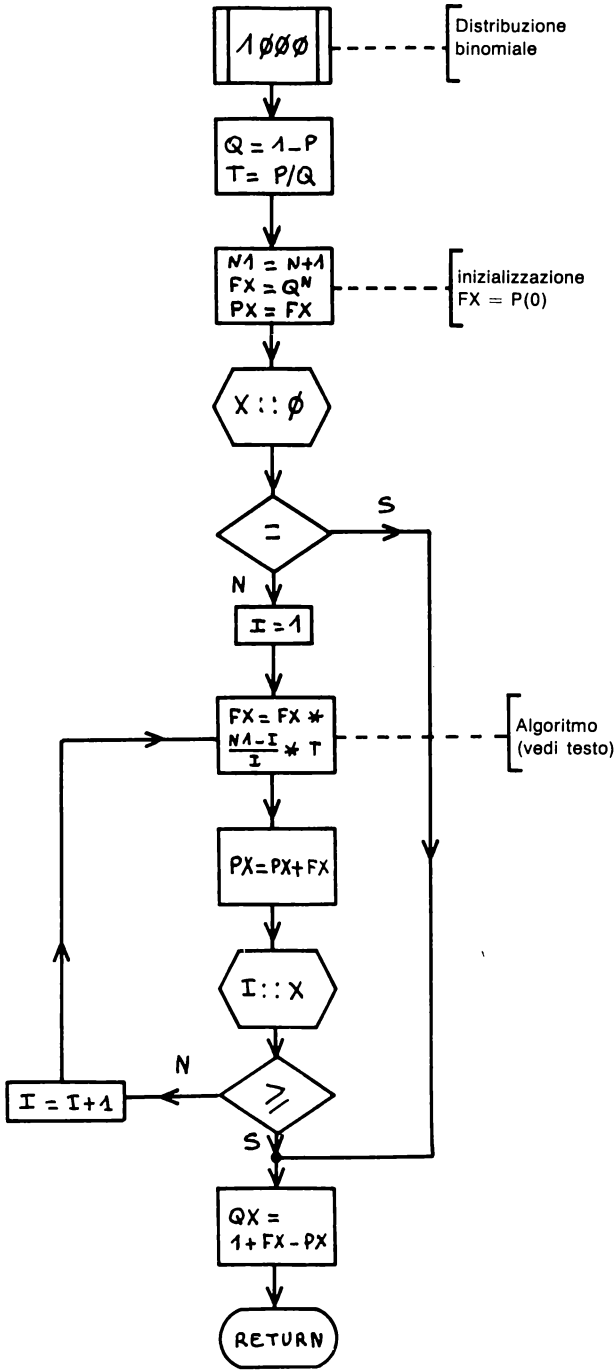
$$A(t|\ \nu) = \begin{cases} (\nu > 1 \text{ e } \nu \text{ dispari}) : 2/\pi \left[\Theta + \sin\Theta\ (\cos\Theta + 2/3 \cos^3\Theta + \ldots\ldots + \dfrac{2\ 4 \ldots (\nu-3)}{3\ 5 \ldots (\nu-2)} \cos^{\nu-2}\Theta\right] \\ (\nu = 1) \qquad 2/\pi\ \Theta \\ (\nu \text{ pari}) \qquad \sin\Theta \left[1 + 1/2 \cos^2\Theta + \ldots + \dfrac{1\ 3\ 5 \ldots (\nu-3)}{2\ 4\ 6 \ldots (\nu-2)} \cos^{\nu-2}\Theta\right] \end{cases}$$

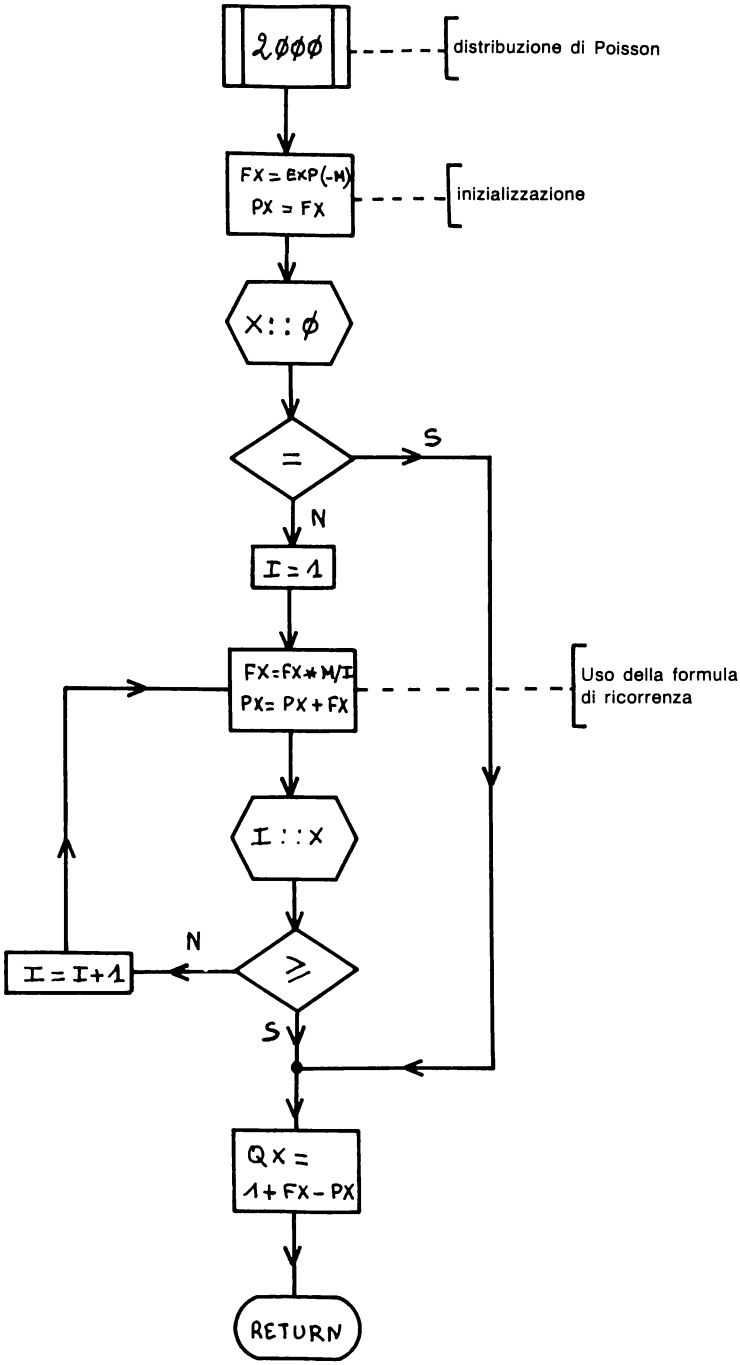
con $\operatorname{tg}\Theta = t/\sqrt{\nu}$

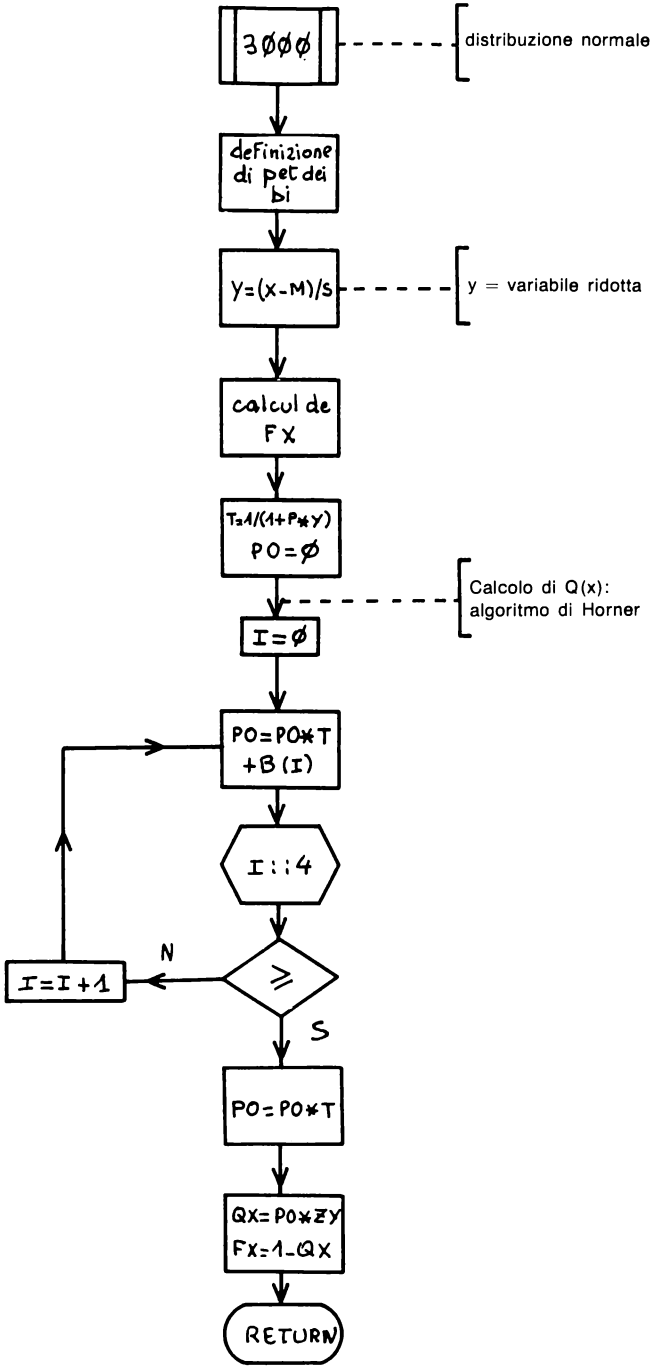
2 — DIAGRAMMA A BLOCCHI

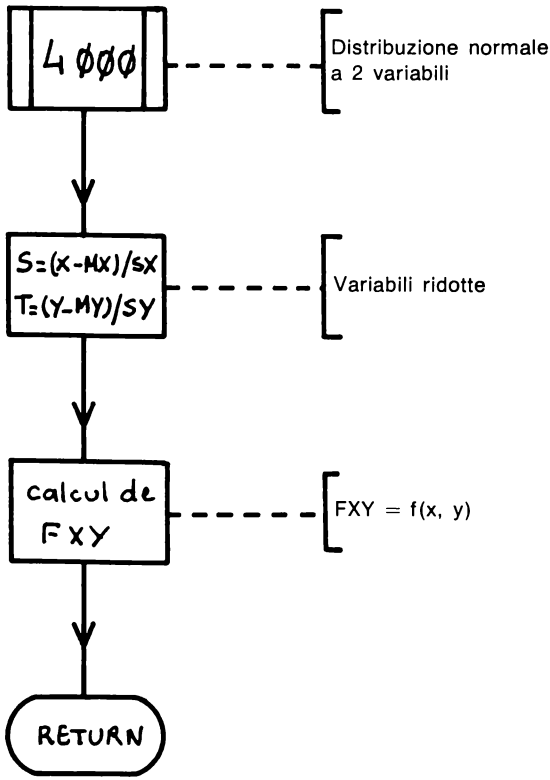


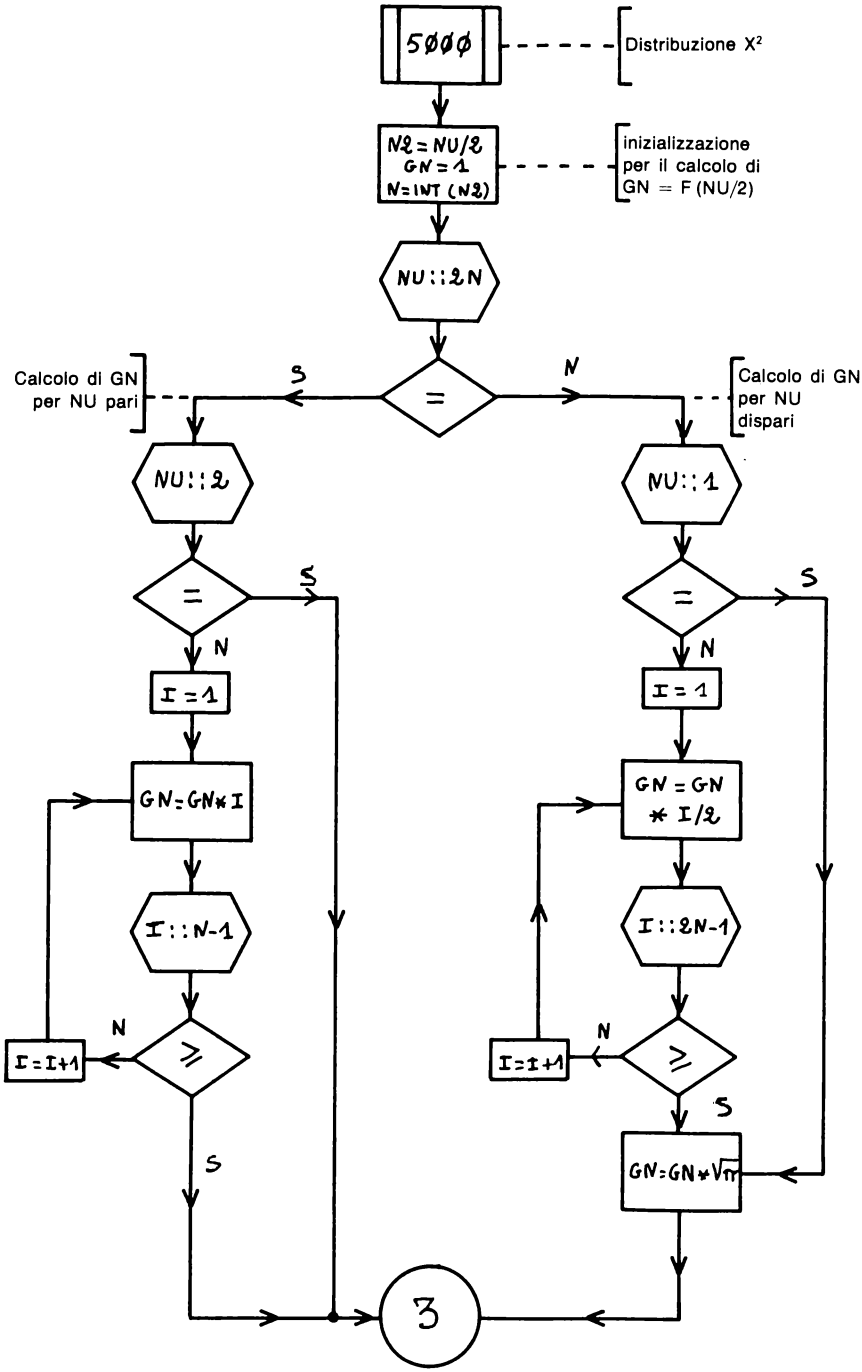

1
CH::4
=
S
FXY
Stampa della
Prob (var: x, y)
N
CH::6
Stampa di BT =
Prob. ([var. aleat.]
≤ x)
BT
PX
QX
S
=
FX
PX
QX
FX = Prob. (var. aleat. = X)
PX = Prob. (var. aleat. ≤ X)
QX = Prob. (var. aleat. ≥ X)
Nuovo
calcolo
N
FIN
X
CH::4
=
S
Y
N
2

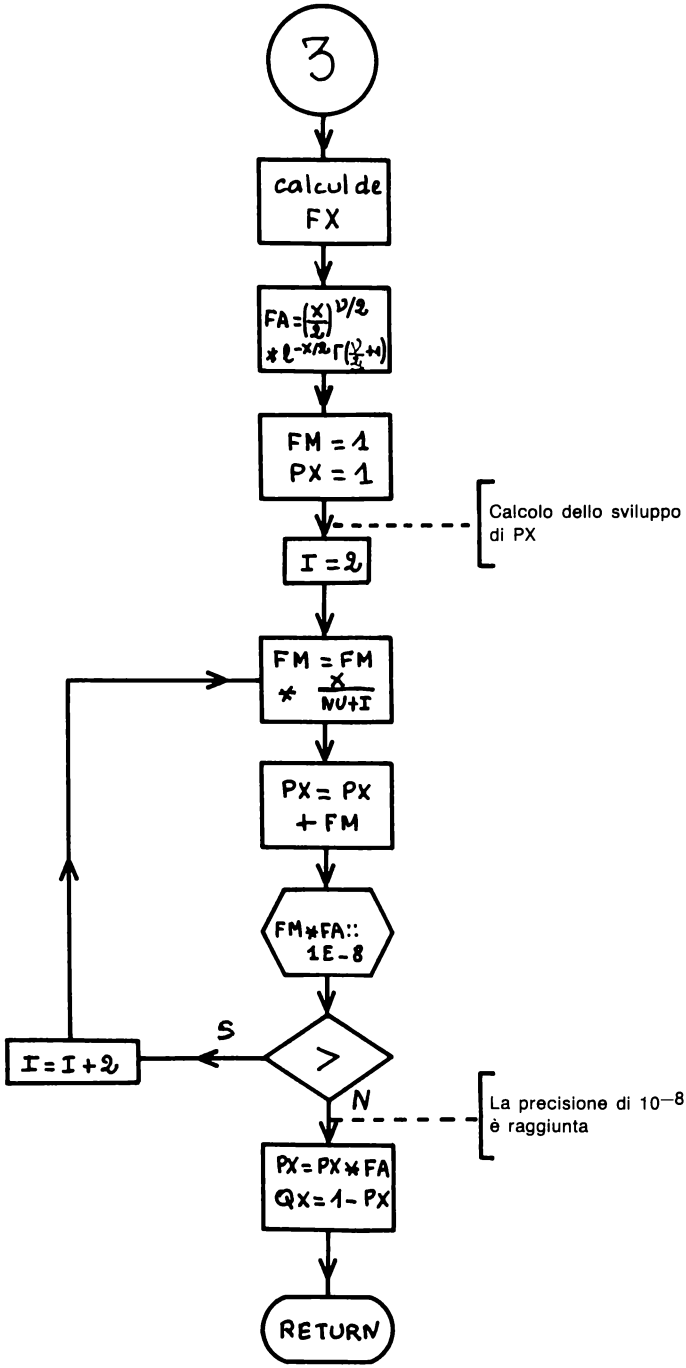

1000
Distribuzione binomiale
Q = 1-P
T = P/Q
N1 = N+1
FX = Q^N
PX = FX
inizializzazione FX = P(0)
X :: 0
=
S
N
I = 1
FX = FX * (N1-I)/I * T
Algoritmo (vedi testo)
PX = PX+FX
I :: X
N
I = I+1
≥
S
QX = 1+FX-PX
RETURN

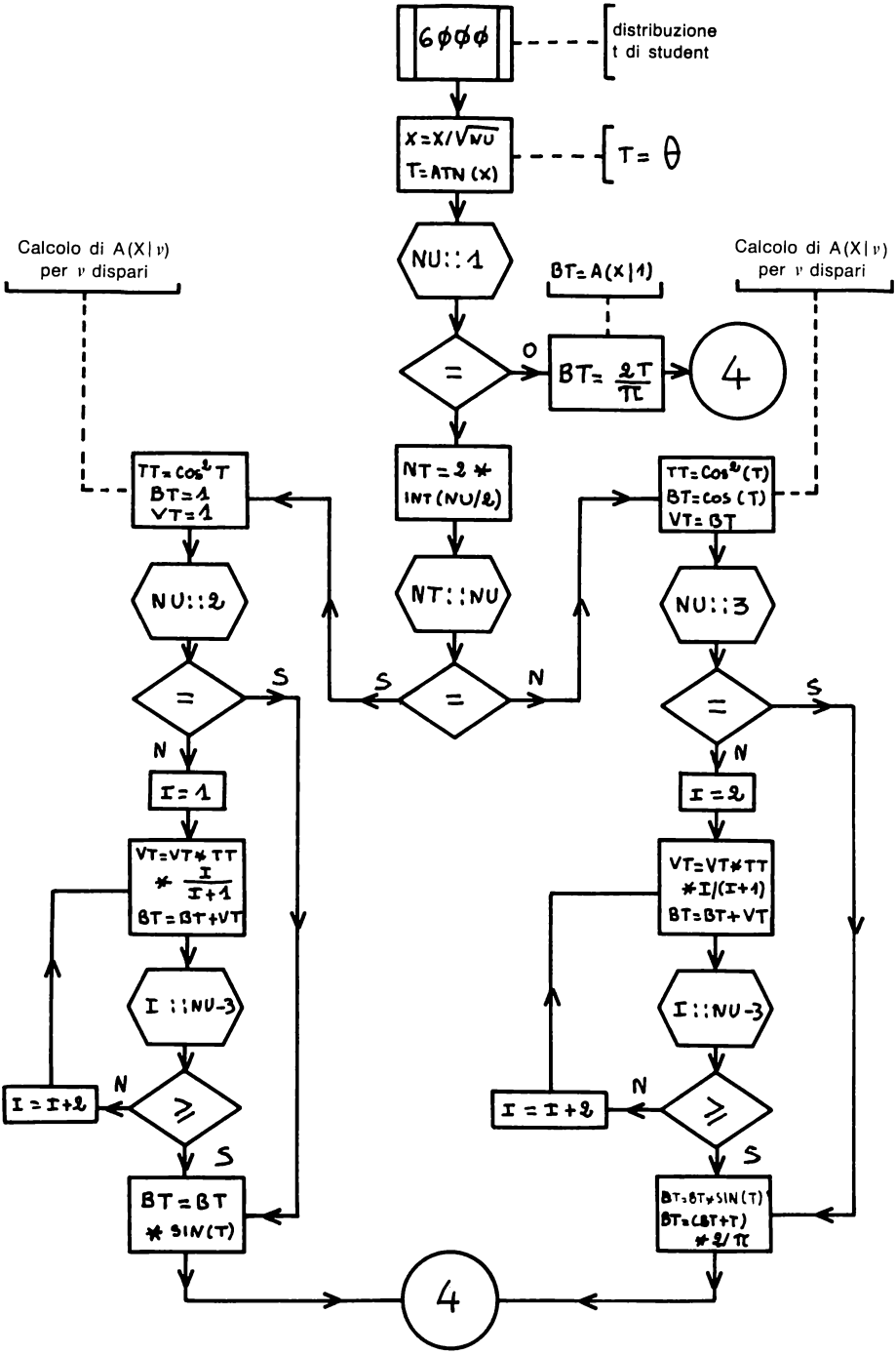

2000
distribuzione di Poisson
FX = EXP(-M)
PX = FX
inizializzazione
X::0
=
S
N
I = 1
FX=FX*M/I
PX= PX+FX
Uso della formula
di ricorrenza
I::X
N
I = I+1
≥
S
QX =
1+FX-PX
RETURN

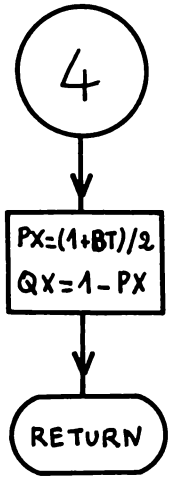

3000
distribuzione normale
definizione di pet dei bi
Y=(X-M)/S
y = variabile ridotta
calcul de FX
T=1/(1+P*Y)
PO=0
Calcolo di Q(x): algoritmo di Horner
I=0
PO=PO*T +B(I)
I::4
N
I=I+1
S
PO=PO*T
QX=PO*ZY
FX=1-QX
RETURN


4 ØØØ
Distribuzione normale
a 2 variabili
S=(X-MX)/SX
T=(Y-MY)/SY
Variabili ridotte
calcul de
FXY
FXY = f(x, y)
RETURN


5000
Distribuzione X²
N2 = NU/2
GN = 1
N = INT (N2)
inizializzazione per il calcolo di GN = F (NU/2)
NU::2N
=
S
N
Calcolo di GN per NU pari
Calcolo di GN per NU dispari
NU::2
NU::1
=
S
N
I = 1
GN = GN * I
I::N-1
≥
N
I = I+1
S
GN = GN * I/2
I::2N-1
≥
N
I = I+1
S
GN = GN * √π
3


3
calcul de FX
FA=(X/2)^(ν/2) * e^(-X/2) Γ(ν/2+1)
FM = 1
PX = 1
Calcolo dello sviluppo di PX
I = 2
FM = FM * X/(NU+I)
PX = PX + FM
FM*FA:: 1E-8
>
S
I = I + 2
N
La precisione di 10^-8 è raggiunta
PX = PX * FA
QX = 1 - PX
RETURN


6000
distribuzione t di student
X=X/√NU
T=ATN (X)
T= θ
NU::1
Calcolo di A(X|ν) per ν dispari
BT=A(X|1)
Calcolo di A(X|ν) per ν dispari
=
O
BT= 2T/π
4
NT=2*INT(NU/2)
TT=COS²T
BT=1
VT=1
TT=COS²(T)
BT=COS(T)
VT=BT
NT::NU
NU::2
NU::3
=
S
N
I=1
I=2
VT=VT*TT*I/(I+1)
BT=BT+VT
VT=VT*TT*I/(I+1)
BT=BT+VT
I::NU-3
I=I+2
≥
BT=BT*SIN(T)
BT=BT+SIN(T)
BT=(BT+T)*2/π
4


4
PX=(1+BT)/2
QX=1-PX
RETURN

3 — PROGRAMMA

```
1  REM    CALCOLO DELLE DISTRIBUZIONI
2  REM          STATISTICHE.
3  REM
4  REM                  AUTORE:H.HAUT
5  REM
6  REM
7  REM     DESCRIZIONE:
8  REM      IL PROGRAMMA PERMETTE DI CALCOLARE
9  REM      LE DISTRIBUZIONI SEGUENTI
10  REM        1.DISTRIBUZIONE BINOMIALE
11  REM        2.DISTRIBUZIONE DI POISSON
12  REM        3.DISTRIBUZIONE NORMALE
13  REM        4.DISTRIBUZIONE NORMALE A 2 VARIABILI
14  REM        5.DISTRIBUZIONE CHI-QUADRO
15  REM        6.DISTRIBUZIONE T DI STUDENT
16  REM
17  REM  ***********************************************
18  REM
19  REM
100  REM
110  REM   REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 5);"CALCOLO DELLE DISTRIBUZIONI"
150  PRINT  TAB( 14);"STATISTICHE "
160  PRINT
170  PRINT  TAB( 20);"AUTORE:H.HAUT"
180  PRINT : PRINT
190  PRINT "1.SCEGLIERE LA DISTRIBUZIONE:              1=DISTR. BINOMIALE"
200  PRINT "  2=DISTR. DI POISSON                      3=DISTR. NORMALE
                         4=DISTR. NORMALE A 2 VARIABILI          5=DISTR.
     CHI-QUADRO                        6=DISTR. T DI STUDENT"
210  PRINT
220  PRINT "2.DEFINIRE I PARAMETRI DELLA DISTRIBU-    ZIONE SCELTA"
230  PRINT
240  PRINT "3.INSERIRE IL VALORE DELLA VARIABILE      ALEATORIA PER CUI DE
     VE ESSERE           EFFETTUATO IL CALCOLO"
250  VTAB (22): PRINT "PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE  ": GET A$
260  REM
270  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
280  REM
290  DIM R(4)
300  REM
310  REM    GESTIONE DEI DATI IN INPUT
320  REM
330  HOME
340  INPUT "SCELTA DELLA DISTRIBUZIONE    ";CH
350  HOME
360  ON CH GOTO 370,410,450,490,590,630
370  PRINT "DISTRIBUZIONE BINOMIALE:                    P=PROBABILITA' DI S
     UCCESSO                N=NUMERO DI PROVE                      X=NUMERO
      DI EVENTI FAVOREVOLI"
380  PRINT : INPUT "P=";P
390  INPUT "N=";N: PRINT
400  INPUT "X=";X: GOTO 690
410  PRINT "DISTRIBUZIONE DI POISSON:                    MU=MEDIA"
420  PRINT : INPUT "MU=";M
430  PRINT : INPUT " X=";X
440  GOTO 690
450  PRINT "DISTRIBUZIONE NORMALE:                       MU=MEDIA
                          S=SCARTO QUADRATICO"
460  PRINT : INPUT "MU=";M
470  INPUT " S=";S: PRINT
480  INPUT " X=";X: GOTO 690
```

```
490  PRINT 'DISTRIBUZIONE NORMALE A 2 VARIABILI X,Y:     MX=MEDIA PER X
                          MY=MEDIA PER Y                          SX=SCAR
     TO QUADRATICO DI X
500  PRINT '   SY=SCARTO QUADRATICO DI Y                 RO=COEFFICIENTE DI
     CORRELAZIONE'
510  PRINT : INPUT 'MX=';MX
520  INPUT 'SX=';SX
530  INPUT 'MY=';MY
540  INPUT 'SY=';SY
550  INPUT 'RO=';RO
560  PRINT : INPUT 'X=';X
570  INPUT 'Y=';Y
580  GOTO 690
590  PRINT 'DISTRIBUZIONE CHI-QUADRO :                  NU=NUMERO DI GRADI D
     I LIBERTA'
600  PRINT : INPUT 'NU=';NU
610  PRINT : INPUT 'X=';X
620  GOTO 690
630  PRINT 'DISTRIBUZIONE T DI STUDENT:                  NU=NUMERO DI GRADI
     DI LIBERTA'
640  PRINT : INPUT 'NU=';NU
650  PRINT : INPUT 'X=';X
660  REM
670  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA PRESCELTO
680  REM
690  ON CH GOSUB 1000,2000,3000,4000,5000,6000
700  REM
710  REM    GESTIONE DEI RISULTATI:
720  REM
730  PRINT
740 A$ = 'PROB(VAR.ALEATORIA =X)='
750 B$ = 'PROB(VAR.ALEATORIA<=X)='
760 C$ = 'PROB(VAR.ALEATORIA>=X)='
770  IF CH = 4 THEN  PRINT 'PROB(VAR.ALEATORIE =X,Y)=';FXY: GOTO 860
780  IF CH <  > 6 THEN  GOTO 830
790  PRINT 'PROB(-X<=VAR.ALEAT.<=X)=';BT
800  PRINT B$;PX
810  PRINT C$;QX
820  GOTO 860
830  PRINT A$;FX
840  PRINT B$;PX
850  PRINT C$;QX
860  PRINT : INPUT 'ALTRO CALCOLO? (S O N): ';D$
870  IF D$ = 'N' THEN  END
880  PRINT : INPUT 'X=';X
890  IF CH = 4 THEN  INPUT 'Y=';Y
900  GOTO 690
1000  REM  ******************************************
1010  REM   SUBROUTINE   DISTRIBUZIONE BINOMIALE
1020  REM
1030  REM  REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
1040  REM     1.DATI NECESSARI:
1050  REM       * P=PROBABILITA' DI SUCCESSO
1060  REM       * N=NUMERO DI PROVE
1070  REM       * X=VALORE DELLA VARIABILE ALEATORIA
1080  REM     2.RISULTATI FORNITI:
1090  REM       * FX=PROB(VAR.ALEATORIA =X)
1100  REM       * PX=PROB(VAR.ALEATORIA<=X)
1110  REM       * QX=PROB(VAR.ALEATORIA>=X)
1120  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
1130  REM      FX,I,N,N1,P,PX,Q,QX,T,X
1140  REM  ******************************************
1150 Q = 1 - P
1160 T = P / Q
1170 N1 = N + 1
1180 FX = Q ^ N: REM  FX=PROB(0)
1190 PX = FX
```

```
1200  IF X = 0 THEN  GOTO 1260: REM  TERMINE
1210  REM    CALCOLO PER RICORRENZA
1220  FOR I = 1 TO X
1230 FX = (N1 - I) * T * FX / I
1240 PX = PX + FX
1250  NEXT I
1260 QX = 1 + FX - PX
1270  RETURN
2000  REM  ******************************************
2010  REM   SUBROUTINE   DISTRIBUZIONE DI POISSON
2020  REM
2030  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
2040  REM     1.DATI NECESSARI:
2050  REM       * M=MEDIA
2060  REM       * X=VALORE DELLA VARIABILE ALEATORIA
2070  REM     2.RISULTATI FORNITI:
2080  REM       * FX=PROB(VAR.ALEATORIA =X)
2090  REM       * PX=PROB(VAR.ALEATORIA<=X)
2100  REM       * QX=PROB(VAR.ALEATORIA>=X)
2110  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
2120  REM      FX,I,M,PX,QX,X
2130  REM  ******************************************
2140 FX =  EXP ( - M)
2150 PX = FX
2160  IF X = 0 THEN  GOTO 2220: REM  TERMINE
2170  REM    FORMULA DI RICORRENZA
2180  FOR I = 1 TO X
2190 FX = FX * M / I
2200 PX = PX + FX
2210  NEXT I
2220 QX = 1 + FX - PX
2230  RETURN
3000  REM  ******************************************
3010  REM   SUBROUTINE   DISTRIBUZIONE NORMALE
3020  REM
3030  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
3040  REM     1.DATI NECESSARI:
3050  REM       * M=MEDIA
3060  REM       * S=SCARTO QUADRATICO
3070  REM       * X=VALORE DELLA VARIABILE ALEATORIA
3080  REM     2.RISULTATI FORNITI:
3090  REM       * FX=PROB(VAR.ALEATORIA =X)
3100  REM       * PX=PROB(VAR.ALEATORIA<=X)
3110  REM       * QX=PROB(VAR.ALEATORIA>=X)
3120  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
3130  REM      FX,I,M,PO,PP,PX,QX,S,T,X,Y,ZY
3140  REM     4.VETTORE UTILIZZATO:
3150  REM      B(4)
3160  REM  ******************************************
3170  REM
3180  REM   DEFINIZIONE DEI COEFFICIENTI B(I)
3190  REM
3200 B(0) = 1.330274429:B(1) =  - 1.821255978:B(2) = 1.781477937:B(3) =  -
     .356563782:B(4) = .319381530
3210 PP = .2316419
3220 Y = (X - M) / S
3230 ZY =  EXP ( - Y * Y / 2) / 2.506628275
3240 FX = ZY / S
3250  REM
3260  REM    CALCOLO DI QX CON IL METODO DI HORNER
3270  REM
3280 T = 1 / (1 + PP * Y)
3290 PO = 0
3300  FOR I = 0 TO 4
3310 PO = PO * T + B(I)
3320  NEXT I
3330 PO = PO * T
```

```
3340 QX = ZY * PO
3350 PX = 1 - QX
3360  RETURN
4000  REM  ******************************************
4010  REM    SUBROUTINE  DISTRIBUZIONE NORMALE A 2 VARIABILI
4020  REM
4030  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
4040  REM     1.DATI NECESSARI:
4050  REM       * MX=MEDIA DI X
4060  REM       * MY=MEDIA DI Y
4070  REM       * SX=SCARTO QUADRATICO DI X
4080  REM       * SY=SCARTO QUADRATICO DI Y
4090  REM       * RO=COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE
4100  REM       * X=VALORE DELLA PRIMA VARIABILE ALEATORIA
4110  REM       * Y=VALORE DELLA SECONDA VARIABILE ALEATORIA
4120  REM     2.RISULTATO FORNITO:
4130  REM       * FXY=PROB(VAR.ALEATORIE =X,Y)
4140  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
4150  REM      FXY,MX,MY,R,RO,S,SX,SY,T,VT,X,Y
4160  REM  ******************************************
4170 S = (X - MX) / SX
4180 T = (Y - MY) / SY
4190 R = 2 * (1 - RO * RO)
4200 VT =  S * S + T * T - 2 * RO * S * T
4210 VT =  EXP ( - VT / R)
4220 S = SX * SY *  SQR (2 * R) * 3.141592654
4230 FXY = VT / S
4240  RETURN
5000  REM  ******************************************
5010  REM   SUBROUTINE   DISTRIBUZIONE CHI-QUADRO
5020  REM
5030  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA:
5040  REM     1.DATI NECESSARI:
5050  REM       * NU=NUMERO DI GRADI DI LIBERTA'
5060  REM       * X=VALORE DELLA VARIABILE ALEATORIA
5070  REM     2.RISULTATI FORNITI:
5080  REM       * FX=PROB(VAR.ALEATORIA =X)
5090  REM       * PX=PROB(VAR.ALEATORIA<=X)
5100  REM       * QX=PROB(VAR.ALEATORIA>=X)
5110  REM       * GN=GAMMA(NU/2)
5120  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
5130  REM       AA,BB,FA,FM,FX,GN,I,N,N2,NU,PX,QX,X
5140  REM  ******************************************
5150  REM
5160  REM   CALCOLO DI GN=GAMMA(NU/2)
5170  REM
5180 N2 = NU / 2
5190 GN = 1
5200 N =  INT (N2)
5210  IF NU = 2 * N THEN  GOTO 5310
5220  REM
5230  REM   CALCOLO DI GN PER NU DISPARI
5240  REM
5250  IF NU = 1 THEN  GOTO 5290
5260  FOR I = 1 TO 2 * N - 1 STEP 2
5270 GN = GN * I / 2
5280  NEXT I
5290 GN = GN * 1.7724528509
5300  GOTO 5380
5310  REM
5320  REM   CALCOLO DI GN PER NU PARI
5330  REM
5340  IF NU = 2 THEN  GOTO 5380
5350  FOR I = 1 TO N - 1 STEP 2
5360 GN = GN * I
5370  NEXT I
5380  REM
```

```
5390  REM    CALCOLO DI FX
5400  REM
5410 FX = X ^ (N2 - 1)
5420 AA =  EXP ( - X / 2)
5430 BB = GN * (2 ^ N2)
5440 FX = FX * AA / BB
5450  REM
5460  REM   CALCOLO DELLO SVILUPPO DI PX
5470  REM
5480 FA = (X / 2) ^ N2
5490 FA = FA * AA / (N2 * GN)
5500 FM = 1
5510 PX = 1
5520 I = 2
5530 FM = FM * X / (NU + I)
5540 PX = PX + FM
5550  IF (FM * FA) > 1E - 8 THEN I = I + 2: GOTO 5530
5560  REM   LA PRECISIONE E' OTTENUTA
5570 PX = PX * FA
5580 QX = 1 - PX
5590  RETURN
6000  REM  ******************************************
6010  REM    SUBROUTINE   DISTRIBUZIONE T DI STUDENT
6020  REM
6030  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
6040  REM     1.DATI NECESSARI:
6050  REM       * NU=NUMERO DI GRADI DI LIBERTA'
6060  REM       * X=VALORE DELLA VARIABILE ALEATORIA
6070  REM     2.RISULTATI FORNITI:
6080  REM       * BT=PROB(-X<=VAR.ALEATORIA<=X)
6090  REM       * PX=PROB(VAR.ALEATORIA<=X)
6100  REM       * QX=PROB(VAR.ALEATORIA>=X)
6110  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
6120  REM      BT,I,NT,NU,PX,QX,T,TT,VT,X
6130  REM  ******************************************
6140 X = X /  SQR (NU)
6150 T =  ATN (X): REM  T=THETA
6160  IF NU = 1 THEN BT = T * .6366197724: GOTO 6450: REM   BT=A(X/1)
6170 NT = 2 *  INT (NU / 2)
6180  IF NT = NU THEN  GOTO 6330
6190  REM
6200  REM   CALCOLO DELLO SVILUPPO DI  A(X/NU) PER NU DISPARI
6210  REM
6220 BT =  COS (T)
6230 TT = BT * BT
6240 VT = BT
6250  IF NU = 3 THEN  GOTO 6300
6260  FOR I = 2 TO NU - 3 STEP 2
6270 VT = VT * I * TT / (I + 1)
6280 BT = BT + VT
6290  NEXT I
6300 BT = BT *  SIN (T)
6310 BT = (BT + T) * .6366197724
6320  GOTO 6450
6330  REM
6340  REM   CALCOLO DELLO SVILUPPO DI  A(X/NU) PER NU PARI
6350  REM
6360 TT =  COS (T) ^ 2
6370 BT = 1
6380 VT = 1
6390  IF NU = 2 THEN  GOTO 6440
6400  FOR I = 1 TO NU - 3 STEP 2
6410 VT = VT * I * TT / (I + 1)
6420 BT = BT + VT
6430  NEXT I
6440 BT = BT *  SIN (T)
6450 PX = (1 + BT) / 2
```

```
6460 QX = 1 - PX
6470  RETURN
```

4 — ESEMPIO PRATICO

L'esempio permette di calcolare le funzioni relative a ciascuna delle sei distribuzioni partendo dai seguenti parametri iniziali:

1 — Binomiale: p = .5
n = 3
x = 1

2 — Poisson: mu = 1.8
x = 4

3 — Normale: mu = 2
sx = 3
x = 5

4 — Doppia normale:
mx = .1
sx = 1.4
my = 2.4
sy = .9
rho = .75
x = 1
y = 2

5 — Chi-quadro: nu = 3
x = 1

6 — t di Student: nu = 19
x = .257

```
RUN
   CALCOLO DELLE DISTRIBUZIONI
            STATISTICHE

                    AUTORE:H.HAUT


1.SCEGLIERE LA DISTRIBUZIONE:
  1=DISTR. BINOMIALE
  2=DISTR. DI POISSON
  3=DISTR. NORMALE
  4=DISTR. NORMALE A 2 VARIABILI
  5=DISTR. CHI-QUADRO
  6=DISTR. T DI STUDENT
```

```
2.DEFINIRE I PARAMETRI DELLA DISTRIBU-
  ZIONE SCELTA

3.INSERIRE IL VALORE DELLA VARIABILE
  ALEATORIA PER CUI DEVE ESSERE
  EFFETTUATO IL CALCOLO
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE
SCELTA DELLA DISTRIBUZIONE    1
DISTRIBUZIONE BINOMIALE:
   P=PROBABILITA' DI SUCCESSO
   N=NUMERO DI PROVE
   X=NUMERO DI EVENTI FAVOREVOLI

P=.5
N=3

X=1

PROB(VAR.ALEATORIA =X)=.375
PROB(VAR.ALEATORIA<=X)=.5
PROB(VAR.ALEATORIA>=X)=.875

ALTRO CALCOLO? (S O N): N

]
```

```
 RUN
    CALCOLO DELLE DISTRIBUZIONI
              STATISTICHE

                    AUTORE:H.HAUT


1.SCEGLIERE LA DISTRIBUZIONE:
  1=DISTR. BINOMIALE
  2=DISTR. DI POISSON
  3=DISTR. NORMALE
  4=DISTR. NORMALE A 2 VARIABILI
  5=DISTR. CHI-QUADRO
  6=DISTR. T DI STUDENT

2.DEFINIRE I PARAMETRI DELLA DISTRIBU-
  ZIONE SCELTA

3.INSERIRE IL VALORE DELLA VARIABILE
  ALEATORIA PER CUI DEVE ESSERE
  EFFETTUATO IL CALCOLO
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE
SCELTA DELLA DISTRIBUZIONE    2
DISTRIBUZIONE DI POISSON:
   MU=MEDIA

MU=1.8

 X=4

PROB(VAR.ALEATORIA =X)=.0723017337
PROB(VAR.ALEATORIA<=X)=.963593339
PROB(VAR.ALEATORIA>=X)=.108708394

ALTRO CALCOLO? (S O N): N

]
```

```
 RUN
    CALCOLO DELLE DISTRIBUZIONI
              STATISTICHE

                     AUTORE:H.HAUT


1.SCEGLIERE LA DISTRIBUZIONE:
  1=DISTR. BINOMIALE
  2=DISTR. DI POISSON
  3=DISTR. NORMALE
  4=DISTR. NORMALE A 2 VARIABILI
  5=DISTR. CHI-QUADRO
  6=DISTR. T DI STUDENT

2.DEFINIRE I PARAMETRI DELLA DISTRIBU-
  ZIONE SCELTA

3.INSERIRE IL VALORE DELLA VARIABILE
  ALEATORIA PER CUI DEVE ESSERE
  EFFETTUATO IL CALCOLO
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE
SCELTA DELLA DISTRIBUZIONE    3
DISTRIBUZIONE NORMALE:
   MU=MEDIA
    S=SCARTO QUADRATICO

MU=2
 S=3

 X=5

PROB(VAR.ALEATORIA =X)=.0806569082
PROB(VAR.ALEATORIA<=X)=.84134474
PROB(VAR.ALEATORIA>=X)=.15865526

ALTRO CALCOLO? (S O N): N

]
```

```
 RUN
    CALCOLO DELLE DISTRIBUZIONI
              STATISTICHE

                     AUTORE:H.HAUT


1.SCEGLIERE LA DISTRIBUZIONE:
  1=DISTR. BINOMIALE
  2=DISTR. DI POISSON
  3=DISTR. NORMALE
  4=DISTR. NORMALE A 2 VARIABILI
  5=DISTR. CHI-QUADRO
  6=DISTR. T DI STUDENT

2.DEFINIRE I PARAMETRI DELLA DISTRIBU-
  ZIONE SCELTA

3.INSERIRE IL VALORE DELLA VARIABILE
  ALEATORIA PER CUI DEVE ESSERE
  EFFETTUATO IL CALCOLO
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE
```

```
SCELTA DELLA DISTRIBUZIONE    4
DISTRIBUZIONE NORMALE A 2 VARIABILI X,Y:
    MX=MEDIA PER X
    MY=MEDIA PER Y
    SX=SCARTO QUADRATICO DI X
   SY=SCARTO QUADRATICO DI Y
   RO=COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

MX=1.1
SX=1.4
MY=2.4
SY=.9
RO=.75

X=1
Y=2

PROB(VAR.ALEATORIE =X,Y)=.159963727

ALTRO CALCOLO? (S O N): N

]
```

```
RUN
    CALCOLO DELLE DISTRIBUZIONI
              STATISTICHE

                    AUTORE:H.HAUT


1.SCEGLIERE LA DISTRIBUZIONE:
  1=DISTR. BINOMIALE
  2=DISTR. DI POISSON
  3=DISTR. NORMALE
  4=DISTR. NORMALE A 2 VARIABILI
  5=DISTR. CHI-QUADRO
  6=DISTR. T DI STUDENT

2.DEFINIRE I PARAMETRI DELLA DISTRIBU-
  ZIONE SCELTA

3.INSERIRE IL VALORE DELLA VARIABILE
  ALEATORIA PER CUI DEVE ESSERE
  EFFETTUATO IL CALCOLO
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE
SCELTA DELLA DISTRIBUZIONE    5
DISTRIBUZIONE CHI-QUADRO :
  NU=NUMERO DI GRADI DI LIBERTA'

NU=3

X=1

PROB(VAR.ALEATORIA =X)=.241970861
PROB(VAR.ALEATORIA<=X)=.198748155
PROB(VAR.ALEATORIA>=X)=.801251845

ALTRO CALCOLO? (S O N): N

]
```

```
RUN
   CALCOLO DELLE DISTRIBUZIONI
            STATISTICHE

                    AUTORE:H.HAUT


1.SCEGLIERE LA DISTRIBUZIONE:
  1=DISTR. BINOMIALE
  2=DISTR. DI POISSON
  3=DISTR. NORMALE
  4=DISTR. NORMALE A 2 VARIABILI
  5=DISTR. CHI-QUADRO
  6=DISTR. T DI STUDENT

2.DEFINIRE I PARAMETRI DELLA DISTRIBU-
  ZIONE SCELTA

3.INSERIRE IL VALORE DELLA VARIABILE
  ALEATORIA PER CUI DEVE ESSERE
  EFFETTUATO IL CALCOLO
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE
SCELTA DELLA DISTRIBUZIONE     6
DISTRIBUZIONE T DI STUDENT:
   NU=NUMERO DI GRADI DI LIBERTA'

NU=19

X=.257

PROB(-X<=VAR.ALEAT.<=X)=.200058704
PROB(VAR.ALEATORIA<=X)=.600029352
PROB(VAR.ALEATORIA>=X)=.399970648

ALTRO CALCOLO? (S O N): N
```

tempo d'esecuzione: 1"
memoria richiesta: 8446 bytes (senza REM : 3108).

PROGRAMMA NUMERO 14

REGRESSIONE AD UN PARAMETRO

Le regressioni ad un parametro, presentate in questo capitolo, permettono di adattare dei dati sperimentali ad una retta o una curva polinomiale di ordine superiore o a una curva di tipo esponenziale o ad una curva di tipo logaritmico.

1 — METODI NUMERICI

1.1 — Regressione lineare semplice

Siano date due variabili x e y legate tra loro da una legge lineare del tipo: $y = \alpha + \beta x$

Il problema della regressione consiste nello stimare i valori da attribuire ai parametri α e β a partire da un insieme di n dati sperimentali x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Supponiamo ora che siano verificate le seguenti ipotesi supplementari:

a) i valori x_i sono esenti da errori sperimentali di misurazione
b) i valori y_i sono soggetti a degli errori di misura ε_i statisticamente indipendenti e aventi distribuzione normale con media 0 e varianza σ^2.

Abbiamo risolto il problema della regressione applicando il metodo dei minimi quadrati che consiste nel calcolare la somma degli scarti quadratici

$$Q = \sum_i (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

e nello stimare i parametri α e β con i valori a e b che rendono minimo il valore di Q.

Per ottenere ciò basta risolvere il sistema:

$$\frac{\delta Q}{\delta \alpha} = \sum_i (y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\frac{\delta Q}{\delta \beta} = \sum_i (y_i - a - bx_i)\, x_i = 0$$

che ha per soluzione:

$$b = \frac{\Sigma (x_i - \overline{x})\, y_i}{\Sigma (x_i - \overline{x})^2}$$

(1) $$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

ove $\overline{x} = 1/n\, \Sigma x_i$ e $\overline{y} = 1/n\, \Sigma y_i$

Sostituendo nella (1) l'espressione $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ si giunge ad esprimere a e b in funzione di α e β.

$$b = \beta + \frac{\Sigma\, \varepsilon_i\, (x_i - \overline{x})}{\Sigma (x_i - \overline{x})^2}$$

$$a = \alpha + \frac{\Sigma\, \varepsilon_i}{n} - \frac{\overline{x}\, \Sigma\, \varepsilon_i\, (x_i - \overline{x})}{\Sigma (x_i - \overline{x})^2}$$

Queste espressioni permettono di calcolare i valori "aspettati" per a e b; E[a] ed E[b] (valori medi di a e b).
Poiché $E[a] = \alpha$ e $E[b] = \beta$ si può dire che a e b sono dei buoni estimatori per i parametri α e β.

Il calcolo della varianza e della covarianza per a e b dà poi i seguenti risultati:

$$\sigma_a^2 = E[(a - \alpha)^2] = \sigma^2 \left(1/n + \frac{\overline{x}^2}{\Sigma (x_i - \overline{x})^2}\right)$$

(2) $$\sigma_b^2 = E[(b - \beta)^2] = \frac{\sigma^2}{\Sigma (x_i - \overline{x})^2}$$

$$\sigma_{a,b} = E[(a - \alpha)\,(b - \beta)] = \frac{-\overline{x}\, \sigma^2}{\Sigma (x_i - \overline{x})^2}$$

Si può dimostrare infine che $s^2 = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2/(n - 2)$ è un buon estimatore di σ^2 ($E[s^2] = \sigma^2$) e tramite esso calcolare i valori delle (2).

Il programma realizzato calcola, a partire dai dati sperimentali i valori di a,b, σ^2, σ_a^2, σ_b^2, σ_{ab} e permette di effettuare un'interpolazione per x o y dati.

1.2 — Adattamento ad altre curve ad un parametro

L'adattamento a una curva del tipo $y = ax^b$ si riduce ad una regressione lineare passando ai logaritmi:

$$\ln y = \ln a + b \cdot \ln x$$

Applicando allora il metodo illustrato in precedenza all'insieme di dati ($\ln x_i$, $\ln y_i$) si possono stimare i valori di $\ln a$ e di b.

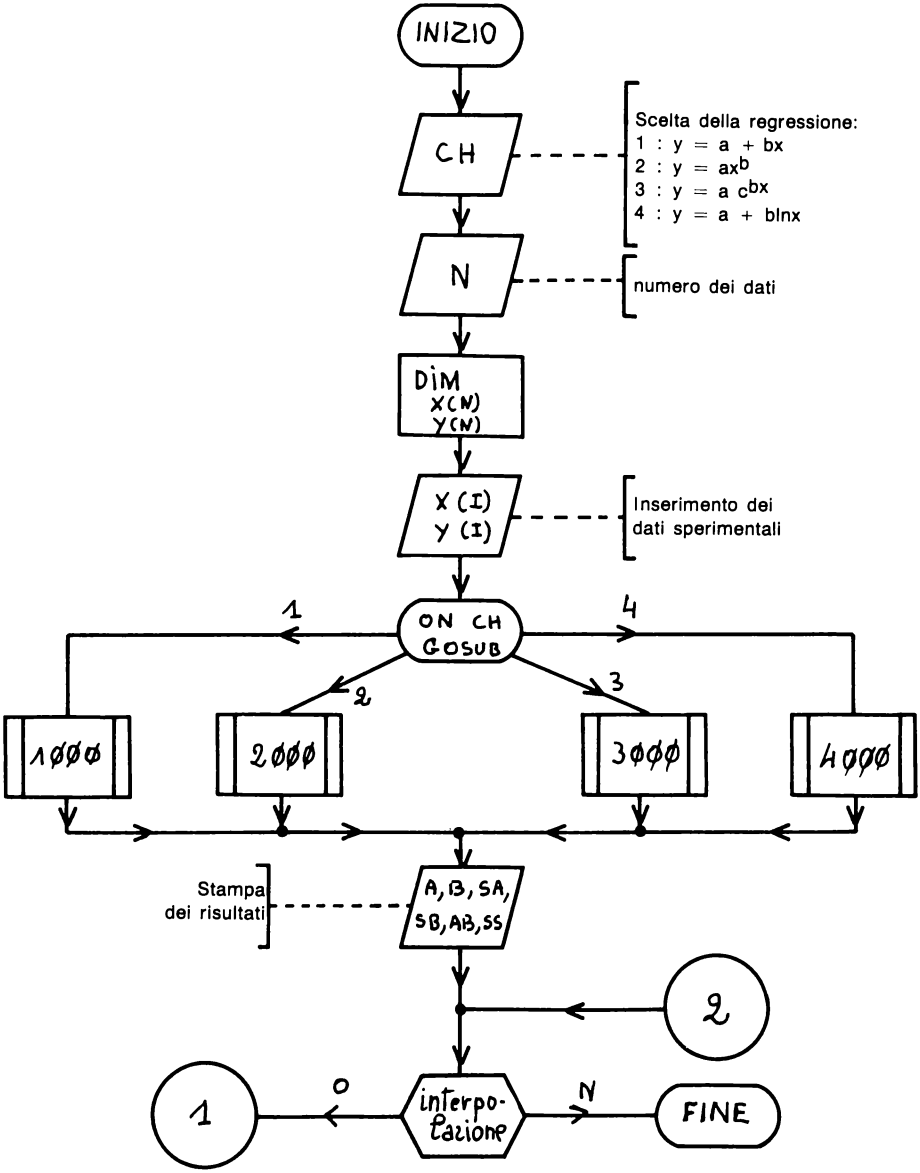
Nello stesso modo si può operare nel caso di una funzione esponenziale del tipo $y = a e^{bx}$, applicando la trasformazione:

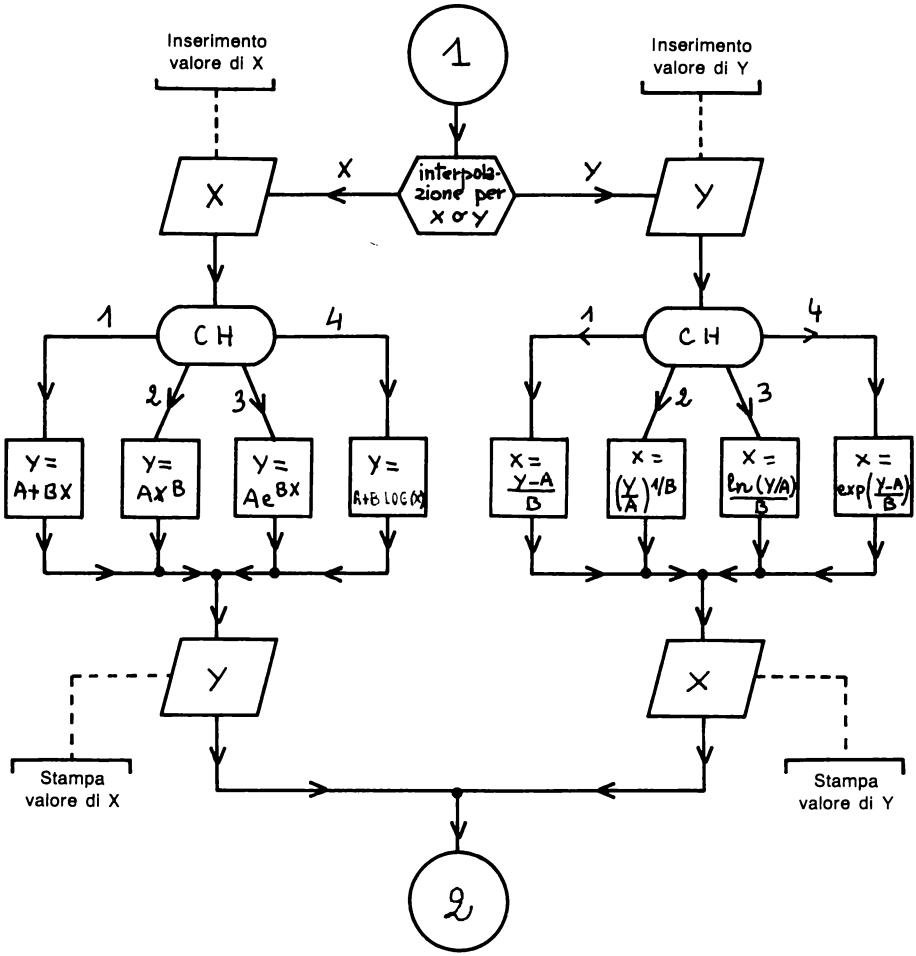
$$\ln y = \ln a + bx$$

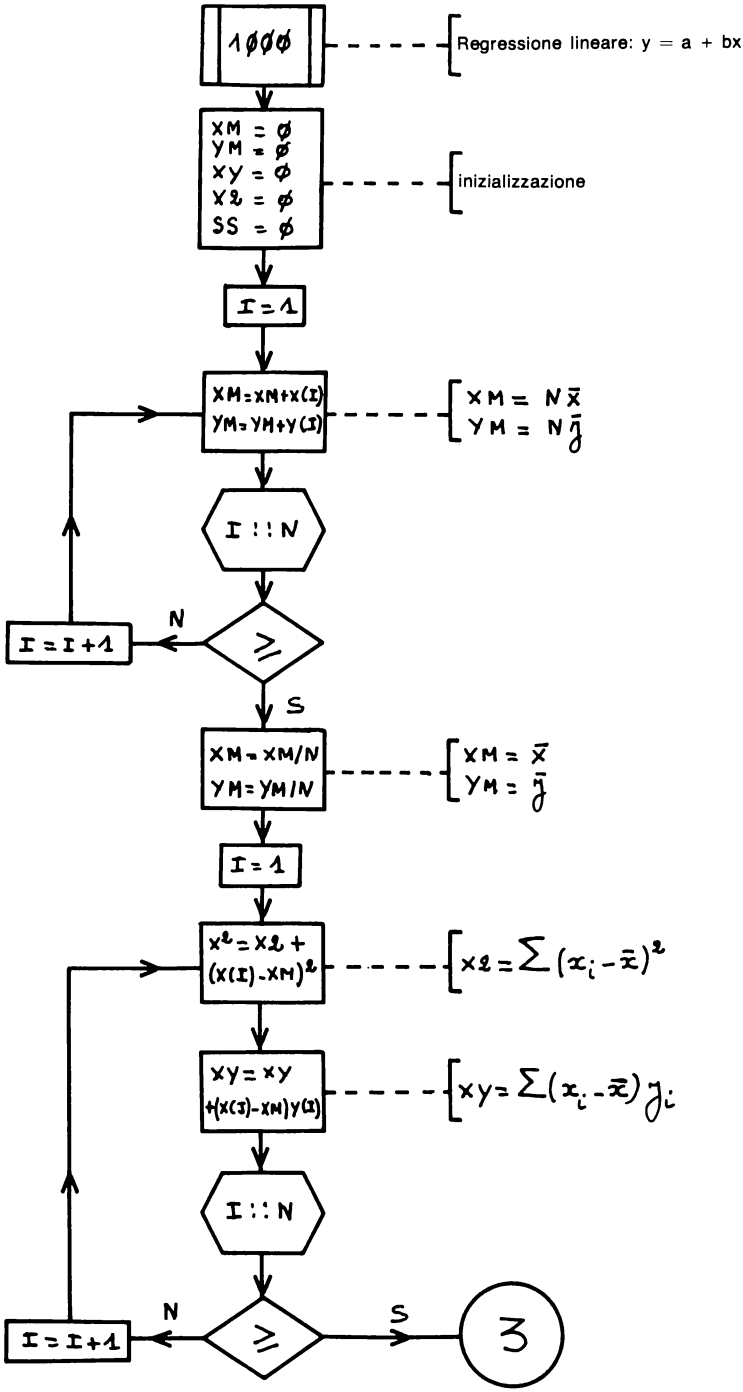
Nel caso di una funzione di tipo logaritmico del tipo $y = a + b \ln x$ non si rendono necessarie ulteriori trasformazioni essendo la stessa già lineare nei parametri a e b.

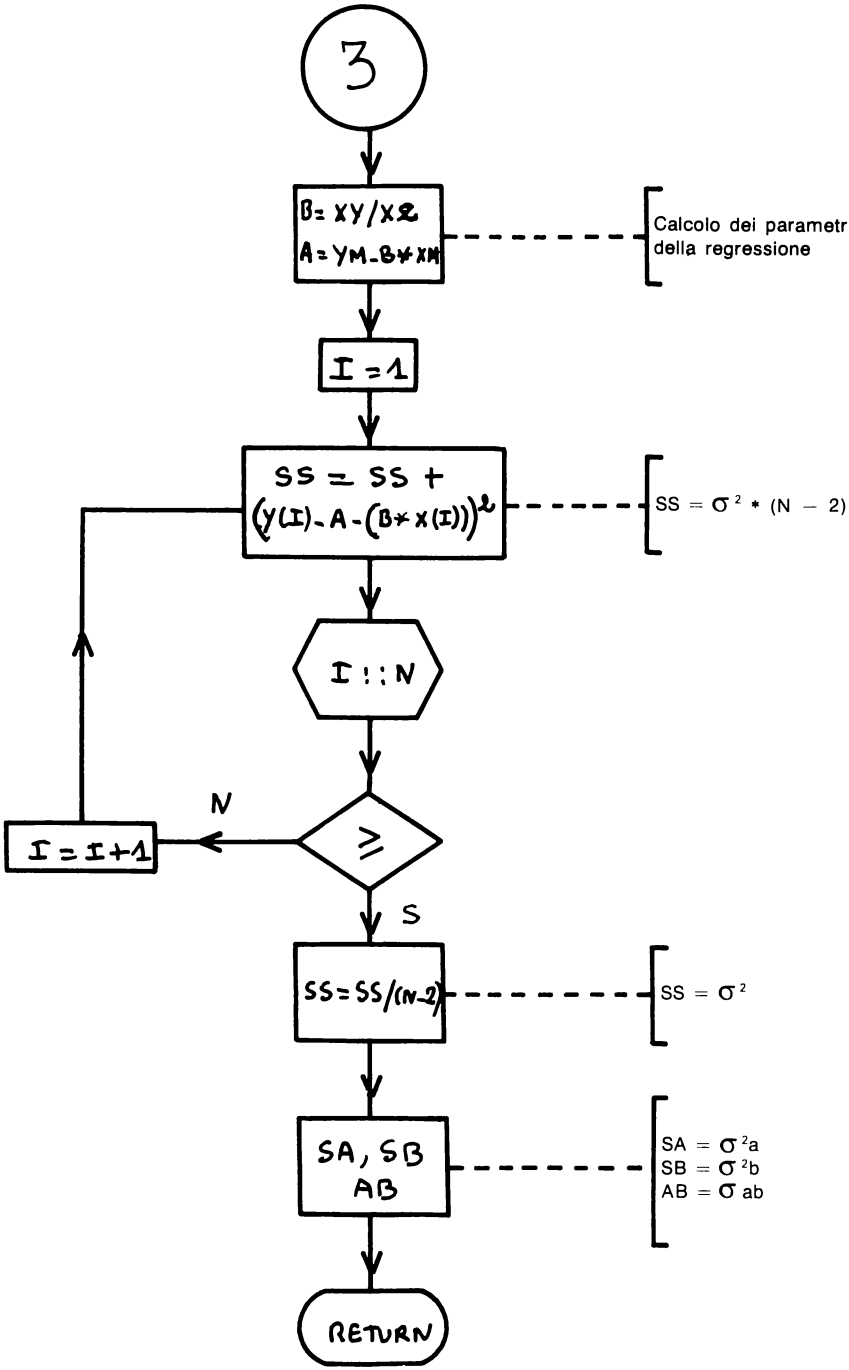
Riferimenti bibliografici: B2, C5, G1, H2, M1.

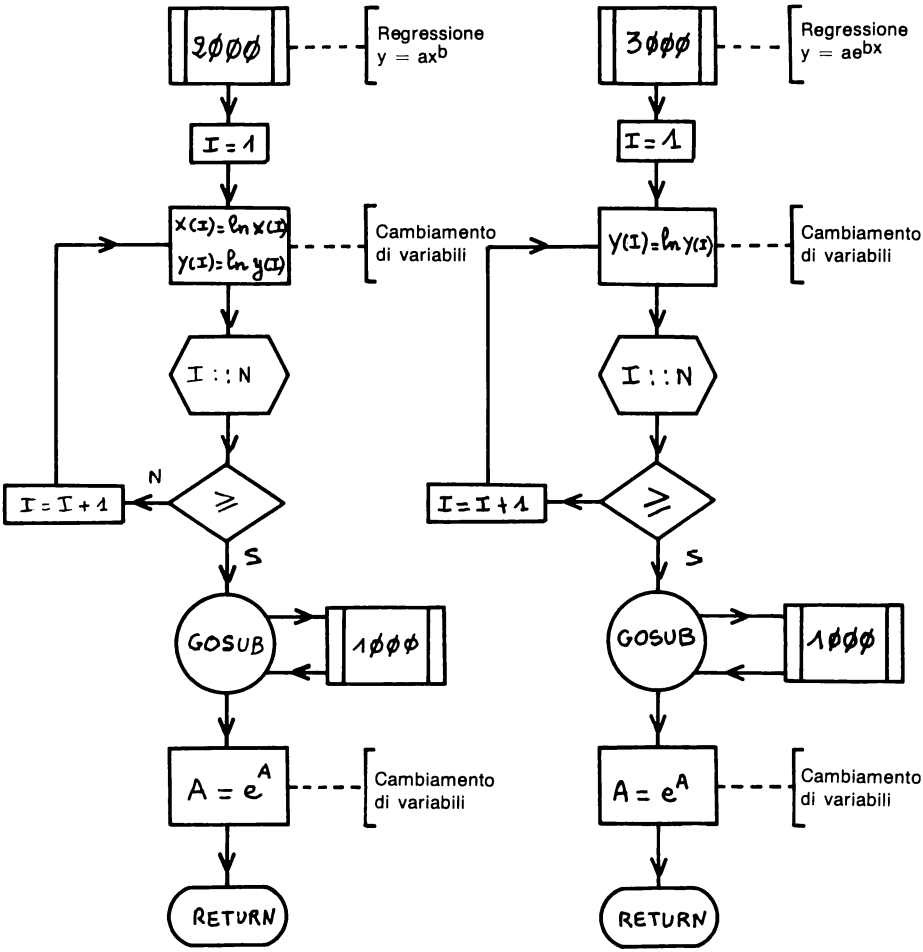
2 — DIAGRAMMA A BLOCCHI

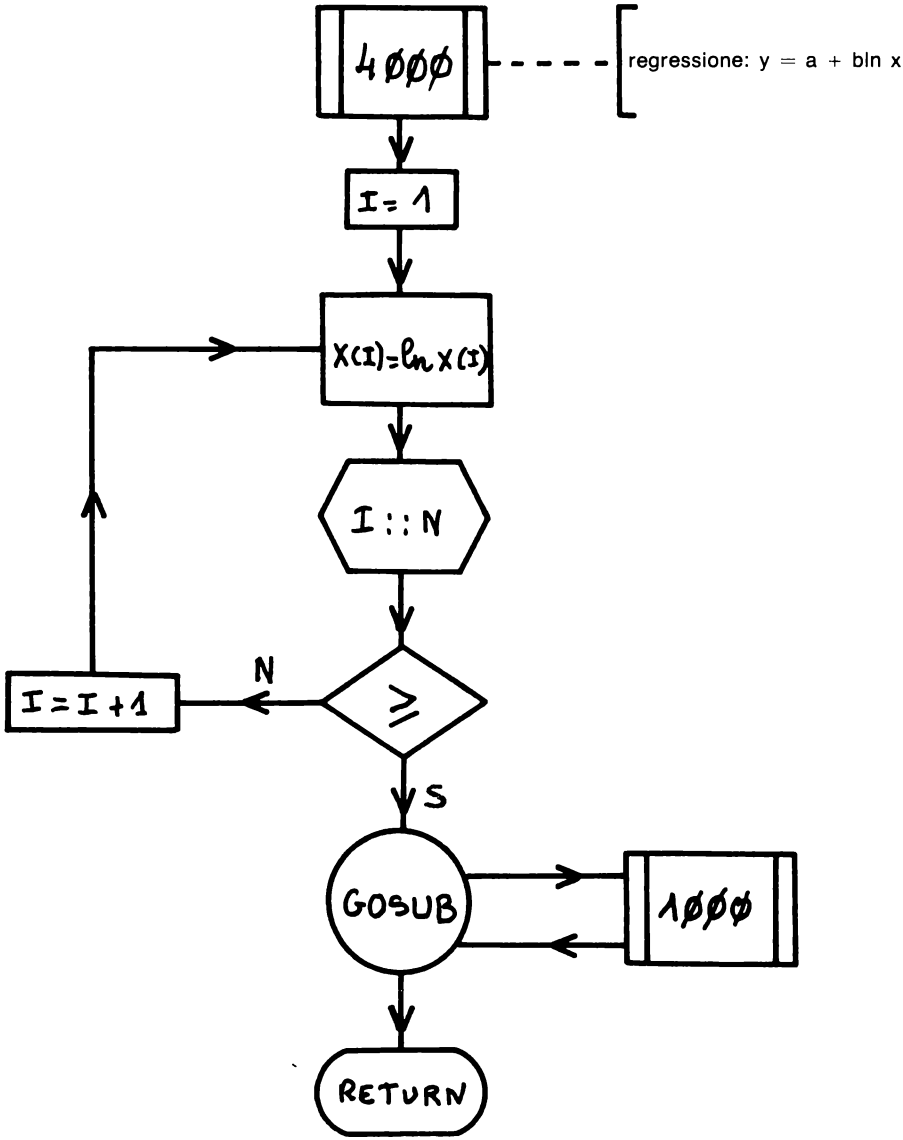



1
Inserimento valore di X
Inserimento valore di Y
X
interpolazione per X o Y
Y
X
Y
1
CH
4
1
CH
4
2
3
2
3
Y= A+BX
Y= AX^B
Y= Ae^BX
Y= A+B LOG(X)
X= (Y-A)/B
X= (Y/A)^1/B
X= ln(Y/A)/B
X= exp((Y-A)/B)
Y
X
Stampa valore di X
Stampa valore di Y
2


1000
Regressione lineare: y = a + bx
XM = 0
YM = 0
XY = 0
X2 = 0
SS = 0
inizializzazione
I = 1
XM = XM + X(I)
YM = YM + Y(I)
XM = N x̄
YM = N ȳ
I :: N
N
I = I + 1
≥
S
XM = XM/N
YM = YM/N
XM = x̄
YM = ȳ
I = 1
X2 = X2 + (X(I) - XM)²
X2 = Σ (xi - x̄)²
XY = XY + (X(I) - XM) Y(I)
XY = Σ (xi - x̄) yi
I :: N
N
I = I + 1
≥
S
3


3
B= XY/X2
A=YM-B*XM
Calcolo dei parametri della regressione
I =1
SS = SS +
(Y(I)-A-(B*X(I)))2
SS = σ2 * (N – 2)
I ! : N
N
I = I+1
≥
S
SS=SS/(N-2)
SS = σ2
SA, SB
AB
SA = σ2a
SB = σ2b
AB = σ ab
RETURN


2000
Regressione
y = ax^b
I = 1
X(I) = ln X(I)
Y(I) = ln y(I)
Cambiamento
di variabili
I :: N
N
I = I + 1
≥
S
GOSUB
1000
A = e^A
Cambiamento
di variabili
RETURN
3000
Regressione
y = ae^bx
I = 1
Y(I) = ln Y(I)
Cambiamento
di variabili
I :: N
I = I + 1
≥
S
GOSUB
1000
A = e^A
Cambiamento
di variabili
RETURN


4ØØØ
regressione: y = a + bln x
I = 1
X(I)=ln X(I)
I :: N
N
I = I + 1
≥
S
GOSUB
1ØØØ
RETURN

3 — PROGRAMMA

```
1   REM        REGRESSIONI AD UN PARAMETRO
3   REM
4   REM                    AUTORE:H.HAUT
5   REM
6   REM
7   REM      DESCRIZIONE:
8   REM       IL PROGRAMMA PERMETTE DI ADATTARE UN INSIEME
9   REM       DI DATI(X(I),Y(I)) A UNA RETTA, A UNA CURVA
10  REM       DEL TIPO A*X^B, A UNA CURVA ESPONENZIALE
11  REM       O A UNA CURVA LOGARITMICA
12  REM
13  REM   ***********************************************
14  REM
15  REM
100  REM
110  REM   REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 5);"REGRESSIONI AD UN PARAMETRO"
160  PRINT : PRINT  TAB( 20);"AUTORE:H.HAUT"
170  PRINT : PRINT
180  PRINT "1.DEFINIRE IL TIPO DI CURVA A CUI SI      VOGLIONO ADATTARE I
     DATI:                    1=RETTA                              2=FUNZI
     ONE DEL TIPO A*X^B                3=CURVA ESPONENZIALE
        4=CURVA LOGARITMICA"
190  PRINT
200  PRINT "2.INTRODURRE IL NUMERO DI DATI SPERIMEN-  TALI"
210  PRINT
220  PRINT "3.INTRODURRE LE COPPIE (X(I),Y(I)) L'UNA  DOPO L'ALTRA"
230  VTAB (22): PRINT "PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE  ": GET A$
240  HOME
250  REM
260  REM    GESTIONE DEI DATI IN INPUT
270  REM
280  DIM MO$(4),VE$(4),VA$(4)
290  FOR I = 1 TO 4: READ MO$(I),VE$(I),VA$(I): NEXT I: REM   PREPARAZIONE
      PER L'IMPAGINAZIONE
300  DATA    "Y=A + B*X","  Y  ","  A  ","Y=A * (X^B)","LN(Y)","LN(A)","Y=
     A* EXP(B*X)","LN(Y)","LN(A)","Y=A + B*LN(X)","  Y  ","  A  "
310  PRINT "TIPO DI REGRESSIONE:"
320  FOR I = 1 TO 4: PRINT  TAB( 20);I;"=";MO$(I): NEXT I
330  INPUT "VOSTRA SCELTA (1,2,3,4 ):";CH
340  PRINT : PRINT
350  INPUT "NUMERO DI PUNTI= ";N
360  REM
370  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
380  REM
400  REM
410  DIM X(N),Y(N)
415  REM  INSERIMENTO DATI
420  FOR I = 1 TO N
430  PRINT
440  PRINT I
450 CV =  PEEK (37): VTAB (CV): HTAB (10): INPUT "X=";X(I)
460  HTAB (10): INPUT "Y=";Y(I)
470  NEXT I
480  REM
490  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA RICHIESTO
500  REM
510  ON CH GOSUB 1000,2000,3000,4000
520  REM
530  REM   GESTIONE DEI RISULTATI
540  REM
550  HOME
```

```
560  PRINT "MODELLO: ";MO$(CH)
570  PRINT
580  PRINT "STIMA DI A      =";A
590  PRINT "STIMA DI B      =";B
600  PRINT
610  PRINT "VARIANZA DI ";VE$(CH);"=";SS
620  PRINT
630  PRINT "VARIANZA DI ";VA$(CH);"=";SA
640  PRINT "VARIANZA DI   B  =";SB
650  PRINT : PRINT "COVARIANZA DI ";VA$(CH);",B =";AB
660  PRINT : PRINT "======================================"
670  REM
680  REM   POSSIBILITA' DI INTERPOLAZIONE
690  REM
700  PRINT : INPUT "CALCOLO D'INTERPOLAZIONE (S O N) :";A$
710  IF A$ = "N" THEN  END
720  INPUT "INTERPOLAZIONE PER X O Y?:"A$
730  IF A$ = "Y" THEN  GOTO 820
740  PRINT : HTAB (5): INPUT "X=";X
750  ON CH GOTO 760,770,780,790: REM              INTERPOLAZIONE IN Y
760 Y = A + B * X: GOTO 800
770 Y = A * (X ^ B): GOTO 800
780 Y = A *  EXP (B * X): GOTO 800
790 Y = A + B *  LOG (X)
800  PRINT  TAB( 5);"Y=";Y
810  GOTO 700
820  PRINT : HTAB (5): INPUT "Y=";Y
830  ON CH GOTO 840,850,860,870: REM   INTERPOLAZIONE IN X
840 X = (Y - A) / B: GOTO 880
850 X = (Y / A) ^ (1 / B): GOTO 880
860 X =  LOG (Y / A) / B: GOTO 880
870 X =  EXP ((Y - A) / B)
880  PRINT  TAB( 5);"X=";X
890  GOTO 700
1000  REM  ***********************************************
1010  REM    SOTTOPROGRAMMA PER LA REGRESSIONE LINEARE
1020  REM
1030  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
1040  REM
1050  REM     1.DATI NECESSARI:
1060  REM       * N=NUMERO DI PUNTI
1070  REM       * X(I),Y(I)  (I=1,...,N) =COORDINATE DI TALI PUNTI
1090  REM     2.RISULTATI FORNITI:
1100  REM       * A,B = PARAMETRI DELLA RETTA  DI
1110  REM         REGRESSIONE Y = A + B*X
1120  REM       * SS=VARIANZA DEGLI Y(I)
1130  REM       * SA=VARIANZA DI A
1140  REM       * SB=VARIANZA DI B
1150  REM       * AB=COVARIANZA DI A,B
1160  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
1170  REM      A,AB,B,I,N,SA,SB,SS,X2,XM,XY,YM
1180  REM     4.VETTORI UTILIZZATI:
1190  REM      X(N),Y(N)
1200  REM  ***********************************************
1210  REM
1220  REM   INIZIALIZZAZIONE
1230  REM
1240 XM = 0:YM = 0
1250 XY = 0:X2 = 0
1260 SS = 0
1270  REM
1280  REM   CALCOLO DI XM E YM (VALORI MEDI DI X E Y)
1290  REM
1300  FOR I = 1 TO N
1310 XM = XM + X(I)
1320 YM = YM + Y(I)
1330  NEXT I
```

```
1340 XM = XM / N
1350 YM = YM / N
1360  REM
1370  REM   CALCOLO DI X2=SOMMA DEGLI SCARTI QUADRATICI E XY=SOMMA DEGLI
      (X(I)-XM)*Y(I)
1380  REM
1390  FOR I = 1 TO N
1400 X2 = X2 + (X(I) - XM) ^ 2
1410 XY = XY + (X(I) - XM) * Y(I)
1420  NEXT I
1430  REM
1440  REM   CALCOLO DEI PARAMETRI A E B
1450  REM
1460 B = XY / X2
1470 A = YM - B * XM
1480  REM
1490  REM    CALCOLO DELLA VARIANZA DI Y(I)
1500  REM
1510  FOR I = 1 TO N
1520 SS = SS + (Y(I) - A - B * X(I)) ^ 2
1530  NEXT I
1540 SS = SS / (N - 2)
1550  REM
1560  REM   CALCOLO DELLE ALTRE VARIANZE
1570  REM
1580 SA = SS * ((1 / N) + (XM * XM / X2))
1590 SB = SS / X2
1600 AB =  - SS * XM / X2
1610  RETURN
2000  REM  ********************************************
2010  REM   SOTTOPROGRAMMA PER L'ADATTAMENTO AD UNA CURVA DI POTENZA
2020  REM
2030  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
2040  REM
2050  REM     1.DATI NECESSARI:
2060  REM       * N=NUMERO DI PUNTI
2070  REM       * X(I),Y(I)  (I=1,...,N) =COORDINATE DI TALI PUNTI
2080  REM     2.RISULTATI FORNITI:
2090  REM       * A,B = PARAMETRI DELLA CURVA DI REGRESSIONE :
2100  REM           Y = A*(X^B)
2110  REM       * SS=VARIANZA DI  LN(Y(I))
2120  REM       * SA=VARIANZA DI LN(A)
2130  REM       * SB=VARIANZA DI B
2140  REM       * AB=COVARIANZA DI LN(A),B
2150  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
2160  REM      A,I,N
2170  REM     4.VETTORI UTILIZZATI:
2180  REM      X(N),Y(N)
2190  REM     5.SOTTOPROGRAMMA CHIAMATO:
2200  REM       1000 : REGRESSIONE LINEARE
2210  REM  *********************************************
2220  REM
2230  REM   CAMBIAMENTO DI VARIABILI
2240  REM
2250  FOR I = 1 TO N
2260 X(I) =  LOG (X(I))
2270 Y(I) =  LOG (Y(I))
2280  NEXT I
2290  REM
2300  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA PER LA REGRESSIONE LINEARE
2310  REM
2320  GOSUB 1000
2330 A =  EXP (A): REM  TRASFORMAZIONE INVERSA
2340  RETURN
3000  REM  ********************************************
3010  REM   SOTTOPROGRAMMA D'ADATTAMENTO AD UNA CURVA ESPONENZIALE
3020  REM
```

```
3030  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
3040  REM
3050  REM     1.DATI NECESSARI:
3060  REM       * N=NUMERO DI PUNTI
3070  REM       * X(I),Y(I)  (I=1,1..,N) =COORDINATE DI TALI PUNTI
3080  REM     2.RISULTATI FORNITI:
3090  REM       * A,B = PARAMETRI DELLA CURVA DI REGRESSIONE:
3100  REM           Y = A*EXP(B*X)
3110  REM       * SS=VARIANZA DEI LN(Y(I))
3120  REM       * SA=VARIANZA DI LN(A)
3130  REM       * SB=VARIANZA DI B
3140  REM       * AB=COVARIANZA DI LN(A),B
3150  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
3160  REM      A,I,N
3170  REM     4.VETTORI UTILIZATI:
3180  REM      X(N),Y(N)
3190  REM     5.SOTTOPROGRAMMA UTILIZZATO:
3200  REM       1000 : REGRESSIONE LINEARE
3210  REM  ********************************************
3220  REM
3230  REM   CAMBIAMENTO DI VARIABILE
3240  REM
3250  FOR I = 1 TO N
3260 Y(I) =  LOG (Y(I))
3270  NEXT I
3280  REM
3290  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA PER LA REGRESSIONE LINEARE
3300  REM
3310  GOSUB 1000
3320 A =  EXP (A): REM   TRASFORMAZIONE INVERSA
3330  RETURN
4000  REM  ********************************************
4010  REM   SOTTOPROGRAMMA PER L'ADATTAMENTO AD UNA CURVA LOGARITMICA
4020  REM
4030  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
4040  REM
4050  REM     1.DATI NECESSARI:
4060  REM       * N=NUMERO DI PUNTI
4070  REM       * X(I),Y(I)  (I=1,...,N) =COORDINATE DI TALI PUNTI
4080  REM     2.RISULTATI FORNITI:
4090  REM       * A,B = PARAMETRI DELLA CURVA DI REGRESSIONE:
4100  REM           Y = A+B*LN(X)
4110  REM       * SS=VARIANZA DI  Y(I)
4120  REM       * SA=VARIANZA DI A
4130  REM       * SB=VARIANZA DI B
4140  REM       * AB=COVARIANZA DI A,B
4150  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
4160  REM      I,N
4170  REM     4.VETTORI UTILIZZATI:
4180  REM      X(N),Y(N)
4190  REM     5.SUBROUTINE CHIAMATA:
4200  REM       1000 : REGRESSIONE LINEARE
4210  REM  ********************************************
4220  REM
4230  REM   CAMBIAMENTO DI VARIABILI
4240  REM
4250  FOR I = 1 TO N
4260 X(I) =  LOG (X(I)).
4270  NEXT I
4280  REM
4290  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA PER LA REGRESSIONE LINEARE
4300  REM
4310  GOSUB 1000
4320  RETURN
```

4 — ESEMPIO PRATICO

Vengono presi in considerazione l'adattamento ad una retta e ad una funzione del tipo $y = ax^b$. Per ciascuno dei due casi sono state scelte 5 coppie di valori sperimentali e precisamente:

a) per $y = a + bx$

x =	1	2	3	4	5
y =	4.95	8.03	10.78	14.06	16.39

b) per $y = ax^b$

x =	1	2	3	4	5
y =	4.97	39.81	136.01	318.76	627.20

```
 RUN
    REGRESSIONI AD UN PARAMETRO

                        AUTORE:H.HAUT


1.DEFINIRE IL TIPO DI CURVA A CUI SI
  VOGLIONO ADATTARE I DATI:
     1=RETTA
     2=FUNZIONE DEL TIPO A*X^B
     3=CURVA ESPONENZIALE
     4=CURVA LOGARITMICA

2.INTRODURRE IL NUMERO DI DATI SPERIMEN-
  TALI

3.INTRODURRE LE COPPIE (X(I),Y(I)) L'UNA
  DOPO L'ALTRA
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE
TIPO DI REGRESSIONE:
                        1=Y=A + B*X
                        2=Y=A * (X^B)
                        3=Y=A* EXP(B*X)
                        4=Y=A + B*LN(X)
VOSTRA SCELTA (1,2,3,4 ):1


NUMERO DI PUNTI= 5

1
          X=1
          Y=4.95

2
          X=2
          Y=8.03

3
          X=3
          Y=10.78

4
          X=4
          Y=14.06

5
          X=5
          Y=16.39
MODELLO: Y=A + B*X
```

```
STIMA DI A      =2.169
STIMA DI B      =2.891

VARIANZA DI    Y  =.0612900006

VARIANZA DI    A  =.0674190006
VARIANZA DI    B  =6.12900006E-03

COVARIANZA DI    A  ,B =-.0183870002

=====================================

CALCOLO D'INTERPOLAZIONE (S O N) :S
INTERPOLAZIONE PER X O Y?:Y

    Y=10
    X=2.7087513

CALCOLO D'INTERPOLAZIONE (S O N) :N



 RUN
    REGRESSIONI AD UN PARAMETRO

                      AUTORE:H.HAUT


1.DEFINIRE IL TIPO DI CURVA A CUI SI
  VOGLIONO ADATTARE I DATI:
    1=RETTA
    2=FUNZIONE DEL TIPO A*X^B
    3=CURVA ESPONENZIALE
    4=CURVA LOGARITMICA

2.INTRODURRE IL NUMERO DI DATI SPERIMEN-
  TALI

3.INTRODURRE LE COPPIE (X(I),Y(I)) L'UNA
  DOPO L'ALTRA
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE
TIPO DI REGRESSIONE:
                      1=Y=A + B*X
                      2=Y=A * (X^B)
                      3=Y=A* EXP(B*X)
                      4=Y=A + B*LN(X)
VOSTRA SCELTA (1,2,3,4 ):2


NUMERO DI PUNTI= 5

1
          X=1
          Y=4.97

2
          X=2
          Y=39.81

3
          X=3
          Y=136.01

4
          X=4
          Y=318.76
```

```
5
          X=5
          Y=627.20
MODELLO: Y=A * (X^B)

STIMA DI A      =4.97061755
STIMA DI B      =3.00538459

VARIANZA DI LN(Y)=3.07452912E-05

VARIANZA DI LN(A)=2.34126102E-05
VARIANZA DI    B  =1.90439498E-05

COVARIANZA DI LN(A),B =-1.82345505E-05

=====================================

CALCOLO D'INTERPOLAZIONE (S O N) :S
INTERPOLAZIONE PER X O Y?:X

     X=6
     Y=1084.06114

CALCOLO D'INTERPOLAZIONE (S O N) :N
```

tempo d'esecuzione: 2"
memoria richiesta: 7063 bytes (senza REM : 2111)

PROGRAMMA NUMERO 15

REGRESSIONE LINEARE MULTIPLA

Questo programma sulla regressione lineare multipla permette di adattare dei dati sperimentali ad un modello teorico funzione lineare in diversi parametri, che dovranno essere opportunamente stimati. Il programma fornisce i valori relativi agli estimatori di questi parametri, i valori delle loro varianze e delle loro covarianze ed il valore della varianza della variabile dipendente.

1 — METODO NUMERICO

Il problema della regressione lineare multipla consiste nello stimare gli r parametri $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ di un modello lineare del tipo:

$$y = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots \beta_r x_{ir}$$

sulla base di n insiemi di dati ($x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir}, y_i$ per $i = 1, 2, \ldots, n$).

Come nel caso della regressione lineare semplice si supporrà che i valori x_{ik} rappresentino delle misure esenti da errori sperimentali e che le y_i siano invece soggette ad un errore aleatorio ε_i, di media 0 e varianza σ^2.

La soluzione si basa sul metodo dei minimi quadrati ed in particolare gli estimatori fedeli dei parametri $\beta_1, \ldots, \beta_r$ sono i valori che rendono minimo lo scarto quadratico:

$$Q = \sum_i (y_i - \beta_1 x_{i1} - \ldots - \beta_r x_{ir})^2$$

Il valore degli estimatori si ottiene quindi risolvendo il sistema di r equazioni in r incognite:

$$\frac{\delta Q}{\delta \beta_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{1}$$

Introduciamo ora le matrici:

$$
\begin{aligned}
X_k &= [x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}]^T \qquad (k = 1, \ldots, r) \\
Y &= [y_1, y_2, \ldots, y_n]^T \\
B &= [b_1, b_2, \ldots, b_r]^T \\
\beta &= [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r]^T \\
X &= \text{matrice } (n, r) \text{ le cui colonne sono } X_1, X_2, \ldots, X_r
\end{aligned}
$$

ove T denota la trasposta della matrice.

Con queste notazioni, il sistema (1) può essere scritto nella forma matriciale $(X^TX)B = X^TY$ e la soluzione (vale a dire la matrice colonna B degli estimatori dei β_i), è data da:

(2) $\quad B = (X^TX)^{-1}X^TY$

Si può allora calcolare la matrice delle covarianze Σ_b:

$$\Sigma_b = E\,[(B - \beta)\,(B - \beta)^T] = \sigma^2\,(X^TX)^{-1}$$

in cui un estimatore fedele di σ^2 è dato da:

$$s^2 = \frac{\text{(somma residua dei quadrati)}}{n - r}$$

ove la somma residua dei quadrati è data da

$$\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 \text{ con } \hat{y}_i = b_1\,x_{i1} + b_2\,x_{i2} + \ldots + b_r\,x_{ir}$$

Riferimenti bibliografici: C5, G1, H2.

2 — TECNICA DI PROGRAMMAZIONE

Dopo aver definito le matrici X e Y nel modo seguente:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}\,x_{12} \ldots x_{1r} \\ x_{21}\,x_{22} \ldots x_{2r} \\ \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \\ x_{n1}\,x_{n2} \ldots x_{nr} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

si calcola il valore di X^TX e lo si memorizza in una matrice AA(r,r) mentre in una matrice BB si memorizza X^T.

L'uso del sottoprogramma per l'inversione di una matrice permette di risolvere l'equazione (2) fornendo la soluzione nella matrice BB e $(X^TX)^{-1}$ in AA. Quest'ultima, moltiplicata per σ^2 fornirà la matrice delle covarianze Σ_b.

Per calcolare la somma residua dei quadrati, si calcola dapprima $\hat{y}_i = \sum_j X_{ij} B_i$, poi $\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$ ed infine l'estimatore fedele di σ^2.

Nota:

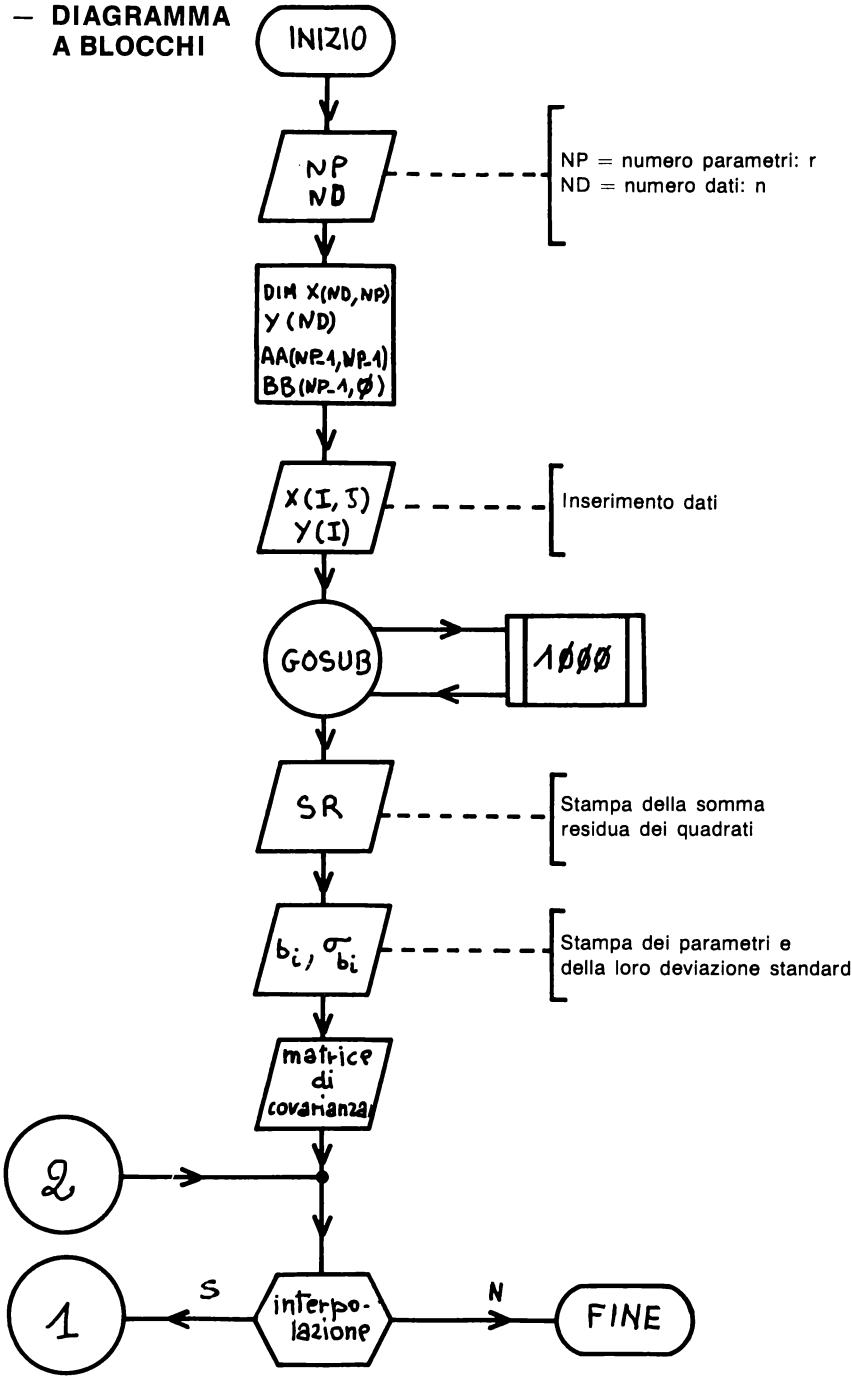
Il programma può essere utilizzato per un qualsiasi modello lineare nei parametri da stimare. Il modello generale di tale funzione è dato da:

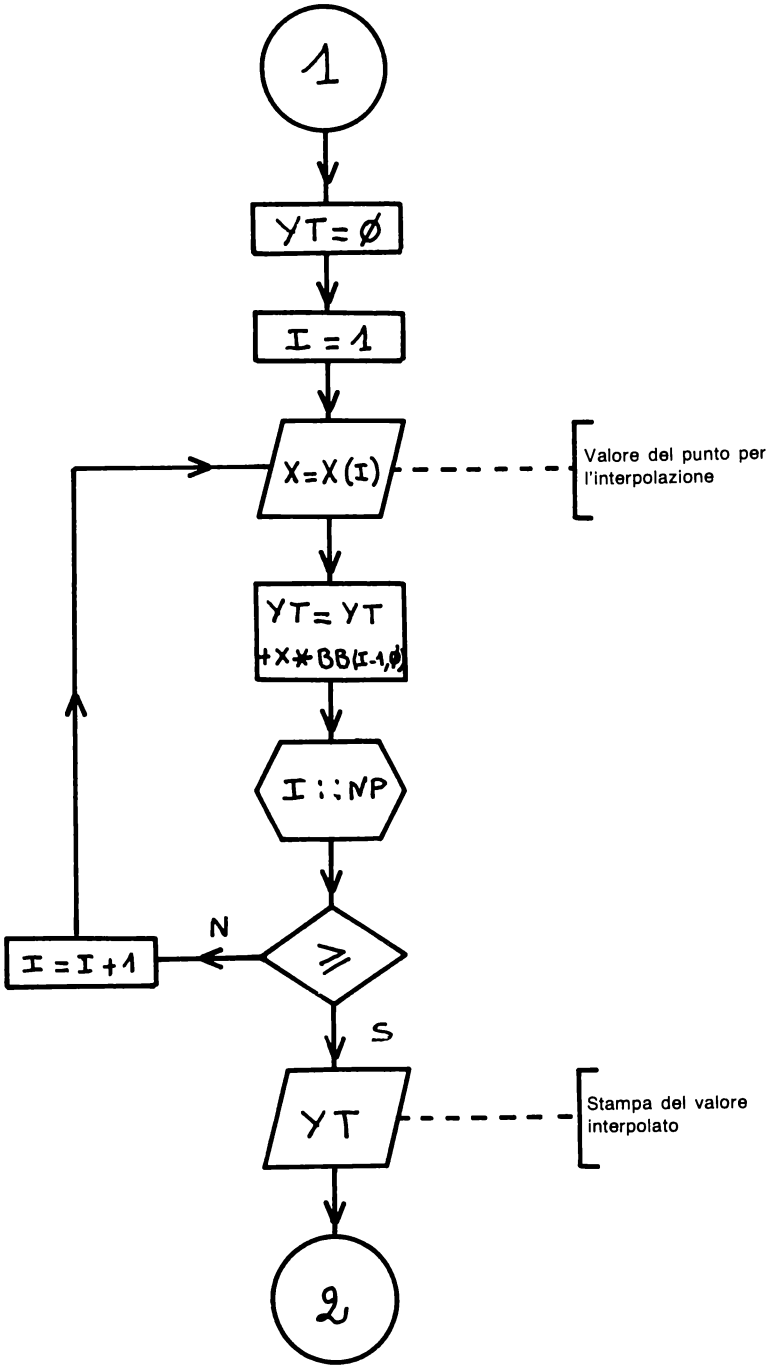
$$y_i = \beta_1 f_1 (x_{i1}, \ldots) + \beta_2 f_2 (x_{i1}, \ldots) + \ldots + B_r f_r (x_{i1}, \ldots)$$

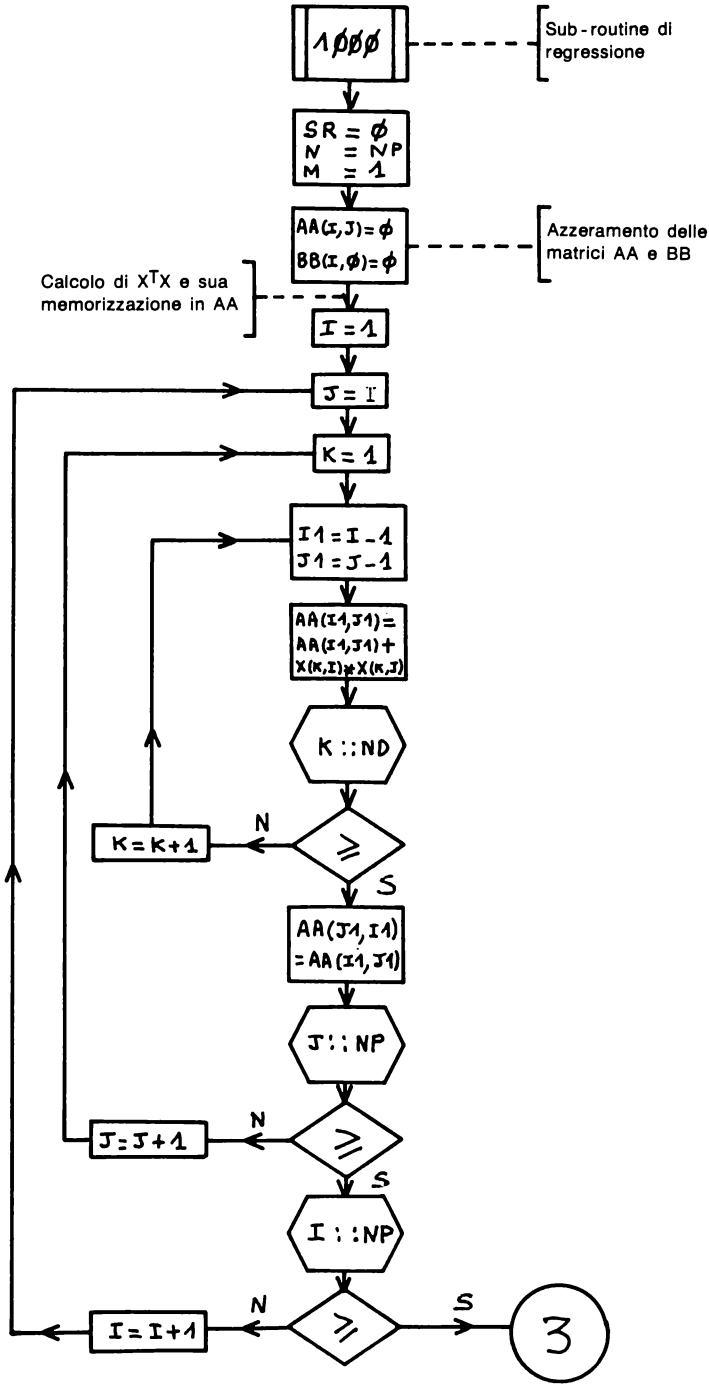
in cui le f_i sono funzioni arbitrarie delle variabili $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{is}$

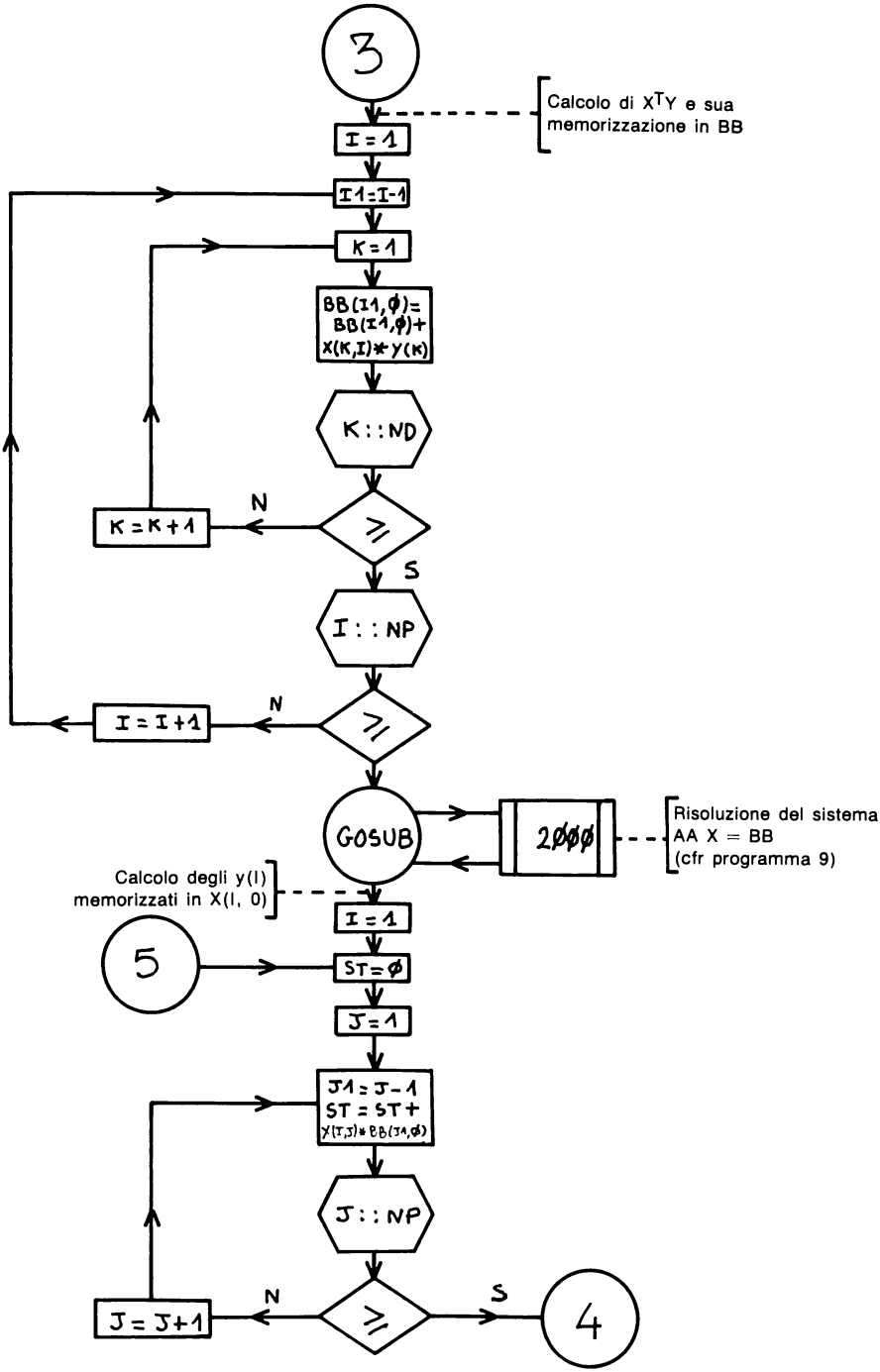
$$X = \begin{pmatrix} f_1(x_{11}, \ldots) & f_2(x_{11}, \ldots) & \ldots & f_r(x_{11}, \ldots) \\ f_1(x_{21}, \ldots) & f_2(x_{21}, \ldots) & \ldots & f_r(x_{21}, \ldots) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ f_1(x_{n1}, \ldots) & f_2(x \quad , \ldots) & \ldots & f_r(x_{n1}, \ldots) \end{pmatrix}$$

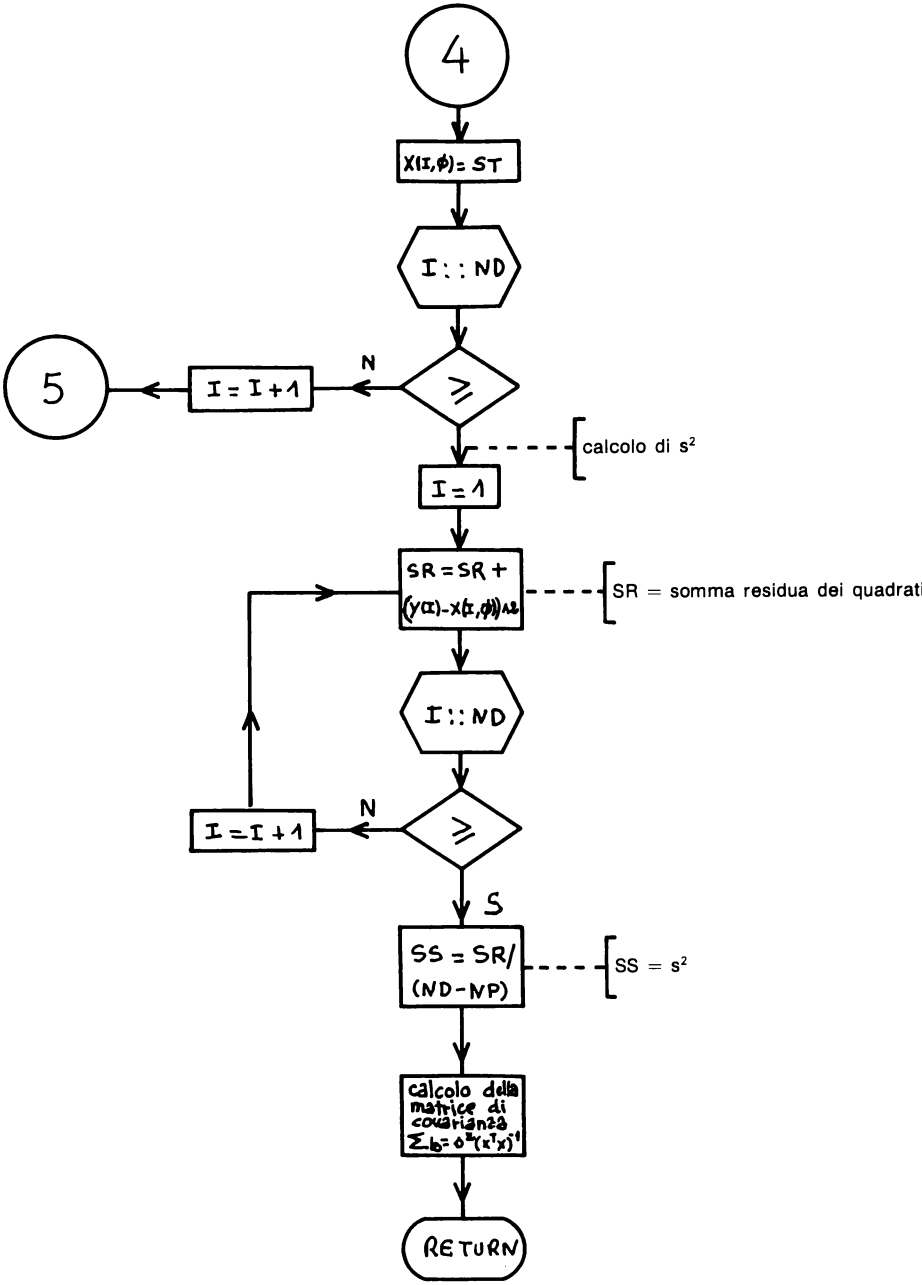
3 — DIAGRAMMA A BLOCCHI




1
YT=Ø
I=1
X=X(I)
Valore del punto per l'interpolazione
YT=YT +X*BB(I-1,Ø)
I::NP
N
I=I+1
S
YT
Stampa del valore interpolato
2


1000
Sub-routine di regressione
SR = 0
N = NP
M = 1
AA(I,J) = 0
BB(I,0) = 0
Azzeramento delle matrici AA e BB
Calcolo di X^TX e sua memorizzazione in AA
I = 1
J = I
K = 1
I1 = I - 1
J1 = J - 1
AA(I1,J1) = AA(I1,J1) + X(K,I) * X(K,J)
K :: ND
N
K = K + 1
S
AA(J1,I1) = AA(I1,J1)
J :: NP
N
J = J + 1
S
I :: NP
N
I = I + 1
S
3


3
Calcolo di X^TY e sua memorizzazione in BB
I = 1
I1=I-1
K = 1
BB(I1,Ø)= BB(I1,Ø)+ X(K,I)*Y(K)
K::ND
N
K = K+1
≥
S
I::NP
N
I = I+1
≥
GOSUB
2ØØØ
Risoluzione del sistema: AA X = BB (cfr programma 9)
Calcolo degli y(I) memorizzati in X(I, 0)
I = 1
5
ST=Ø
J = 1
J1 = J-1
ST = ST+ X(I,J)*BB(J1,Ø)
J::NP
N
J = J+1
≥
S
4


4
X(I,Φ) = ST
I : : ND
N
I = I + 1
5
calcolo di s²
I = 1
SR = SR +
(Y(I) - X(I,Φ))^2
SR = somma residua dei quadrati
I : : ND
N
I = I + 1
S
SS = SR/
(ND - NP)
SS = s²
calcolo della
matrice di
covarianza
Σb = σ²(X^T X)^-1
RETURN

4 — PROGRAMMA

```
1   REM      PROGRAMMA DI REGRESSIONE
2   REM            LINEARE MULTIPLA
3   REM
4   REM                    AUTORE:H.HAUT
5   REM
6   REM     DESCRIZIONE:
7   REM       IL PROGRAMMA PERMETTE DI ADATTARE UN
8   REM       INSIEME DI DATI(X(1),..,X(NP),Y) AL MODELLO
9   REM        Y=B(1)*X(1)+...+B(NP)*X(NP)
10  REM
11  REM
100  REM
110  REM     REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 8);"PROGRAMMA DI REGRESSIONE"
150  PRINT  TAB( 11);"LINEARE MULTIPLA"
160  PRINT
170  PRINT  TAB( 20);"AUTORE:H.HAUT"
180  PRINT : PRINT
190  PRINT "1.DEFINIRE IL NUMERO DI GRUPPI DI DATI    N E DI PARAMETRI NP
     ": PRINT
200  PRINT "2.INSERIRE POI GLI ND GRUPPI DI DATI      SECONDO IL SEGUENTE
     MODELLO:"
210  PRINT
220  PRINT "     Y(I)=B(1)*X(I,1) + B(2)*X(I,2) + ..          ..+B(NP)*X(I,
     NP)                                                                I=
     1,2,...,ND"
230  PRINT
240  PRINT "3.SE B(1) RAPPRESENTA UN TERMINE COSTAN-  TE, TUTTI GLI X(I,1)
      DEVONO ESSERE      UGUALI A 1)
250  VTAB (22): PRINT "PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE": GET A$
260  REM
270  REM   GESTIONE DEI DATI IN INPUT
280  REM
290  HOME
300  PRINT "MODELLO: "
310  PRINT "     Y(I)=B(1)*X(I,1) + B(2)*X(I,2) + ..          ..+B(NP)*X(I,
     NP)                                                                I=
     1,2,...,ND"
320  PRINT
330  INPUT "NUMERO DI PARAMETRI: NP=";NP
340  INPUT "NUMERO DI DATI:      ND=";ND
350  REM
360  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
370  REM
380  DIM X(ND,NP),Y(ND),AA(NP - 1,NP - 1),BB(NP - 1,0)
390  REM
400  REM   INSERIMENTO DATI
410  REM
420  FOR I = 1 TO ND
430  PRINT : PRINT "GRUPPO ";I;" DI DATI"
440  FOR J = 1 TO NP: HTAB (10)
450  PRINT "X(";I;",";J;")":CV =  PEEK (37): VTAB (CV): HTAB (20): INPUT "
     =";X(I,J)
460  NEXT J
470  HTAB (10): PRINT "Y(";I;")":CV =  PEEK (37): VTAB (CV): HTAB (20): INPUT
     "=";Y(I)
480  NEXT I
490  REM
500  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
510  REM
520  GOSUB 1000
530  REM
```

```
540  REM   GESTIONE DEI RISULTATI
550  REM
560  HOME : CALL  - 198
570  PRINT "SOMMA RESIDUA DEI QUADRATI= ";SR
580  PRINT "VARIANZA DEGLI X(I)        = ";SS
590  PRINT
600  PRINT "STRIMA DEI "; TAB( 25);"DEVIAZIONI"
610  PRINT "PARAMETRI"; TAB( 25);"STANDARD"
620  PRINT "**************"; TAB( 25);"**********"
630  FOR I = 1 TO NP
640 I1 = I - 1
650 SD =  SQR (AA(I1,I1))
660  PRINT "B(";I;")=";BB(I1,0); TAB( 25);SD
670  NEXT I
680  REM
690  REM   STAMPA EVENTUALE DELLA MATRICE DELLE COVARIANZE
700  REM
710  PRINT : PRINT "SE NON SI VUOLE LA MATRICE DELLE        COVARIANZE, PR
     EMERE ESC ALTRIMENTI UN ALTRO TASTO": GET A$
720  IF  ASC (A$) = 27 THEN  GOTO 870
730  FOR I = 1 TO NP
740  HOME
750  PRINT "COLONNA ";I;" DELLA MATRICE DI COVARIANZA:"
760 I1 = I - 1
770  FOR J = 1 TO NP
780 J1 = J - 1
790  PRINT  TAB( 5);AA(I1,J1)
800  NEXT J
810  PRINT "PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE"
820  GET A$
830  NEXT I
840  REM
850  REM   SCELTA PER L'INTERPOLAZIONE
860  REM
870  PRINT : INPUT "INTERPOLAZIONE?(S O N): ";A$
880  IF A$ = "N" THEN  END
890 YT = 0
900  FOR I = 1 TO NP
910  PRINT "X";I;"=";CV =  PEEK (37): VTAB (CV): HTAB (6): INPUT " ";X
920 YT = YT + X * BB(I - 1,0): REM  CALCOLO DELL'INTERPOLAZIONE SECONDO IL
     MODELLO DATO
930  NEXT I
940  PRINT : PRINT "Y= "; TAB( 7);YT: PRINT
950  GOTO 870
1000  REM  ***************************************************
1010  REM   SOTTOPROGRAMMA DI REGRESSIONE LINEARE MULTIPLA
1020  REM   ESSO PERMETTE DI ADATTARE UN INSIEME DI DATI
1030  REM   SPERIMENTALI(I,1),...,(I,NP),Y(I) AL SEGUENTE MODELLO
1040  REM   AD NP PARAMETRI:
1050  REM    Y(I)=B(1)*X(I,1) + B(2)*X(I,2) + ... + B(NP)*X(I,NP)
1060  REM         I=1,2,...,ND
1070  REM
1080  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
1090  REM     1.DATI NECESSARI:
1100  REM       * ND=NUMERO DI DATI
1110  REM       * NP=NUMERO DI PARAMETRI
1120  REM       * X(I,J)=VALORI DELLE VARIABILI INDIPENDENTI
1130  REM         DEFINITE NEL MODELLO
1140  REM           I=1,2,...,ND
1150  REM           J=1,2,...,NP
1160  REM       * Y(I)=VALORI DELLA VARIABILE DIPENDENTE
1170  REM           I=1,2,...,ND
1180  REM     2.RISULTATI FORNITI:
1190  REM       * BB(I-1,0)=STIMATORE DEL PARAMETRO B(I)
1200  REM           I=0,1,...,NP-1
1210  REM       * AA(I-1,J-1)=COVARIANZA DI B(I),B(J)
1220  REM           I=0,1,...,NP-1
```

```
1230  REM            J=0,1,...,NP-1
1240  REM        * SR=SOMMA RESIDUA DEI QUADRATI
1250  REM        * SS=VARIANZA DEGLI Y(I)
1260  REM      3.VARIABILI UTILIZZATE:
1270  REM       I,I1,J,J1,K,M,N,ND,NP,SR,SS,ST
1280  REM      4.VETTORI E MATRICI UTILIZZATI:
1290  REM       AA(NP-1,NP-1),BB(NP-1,0),X(ND,NP),Y(ND)
1300  REM      5.SOTTOPROGRAMMA CHIAMATO:
1310  REM        SUBROUTINE 2000 PER L'INVERSIONE DI UNA MATRICE
1320  REM  ***********************************************
1330  REM
1340  REM   INIZIALIZZAZIONI
1350  REM
1360 SR = 0:N = NP:M = 1
1370  FOR I = 0 TO NP - 1
1380  FOR J = 0 TO NP - 1
1390 AA(I,J) = 0
1400  NEXT J
1410 BB(I,0) = 0
1420  NEXT I
1430  REM
1440  REM   CALCOLO DELLA MATRICE X(T)X DA MEMORIZZARE IN AA
1450  REM     (SI USA  X(T) PER INDICARE LA TRASPOSTA DI X)
1460  REM
1470  FOR I = 1 TO NP
1480  FOR J = I TO NP
1490  FOR K = 1 TO ND
1500 I1 = I - 1:J1 = J - 1
1510 AA(I1,J1) = AA(I1,J1) + X(K,I) * X(K,J)
1520  NEXT K
1530 AA(J1,I1) = AA(I1,J1)
1540  NEXT J
1550  NEXT I
1560  REM
1570  REM   CALCOLO DI X(T)Y DA MEMORIZZARE IN BB
1580  REM
1590  FOR I = 1 TO NP
1600 I1 = I - 1
1610  FOR K = 1 TO ND
1620 BB(I1,0) = BB(I1,0) + X(K,I) * Y(K)
1630  NEXT K
1640  NEXT I
1650  REM
1660  REM   CHIAMATA DELLA SUBROUTINE PER LA RISOLUZIONE DI UN SISTEMA
1670  REM
1680  GOSUB 2000
1690  REM
1700  REM    CALCOLO DEGLI Y(I) TEORICI DEL MODELLO
1720  REM
1730  FOR I = 1 TO ND
1740 ST = 0
1750  FOR J = 1 TO NP
1760 J1 = J - 1
1770 ST = ST + X(I,J) * BB(J1,0)
1780  NEXT J
1790 X(I,0) = ST
1800  NEXT I
1810  REM
1820  REM  CALCOLO DELL'ESTIMATORE DELLA VARIANZA DEGLI Y(I)
1830  REM
1840  FOR I = 1 TO ND
1850 SR = SR + ((Y(I) - X(I,0)) ^ 2)
1860  NEXT I
1870  REM   SR=SOMMA RESIDUA DEI QUADRATI
1880 SS = SR / (ND - NP)
1890  REM
1900  REM  CALCOLO DELLA MATRICE DELLE COVARIANZE
```

```
1910  REM   MEMORIZZATA IN AA(I,J)
1920  REM
1930  FOR I = 0 TO NP - 1
1940  FOR J = 0 TO NP - 1
1950 AA(I,J) = AA(I,J) * SS
1960  NEXT J
1970  NEXT I
1980  RETURN
2000  REM  ****************************************
2010  REM   SOTTOPROGRAMMA PER LA RISOLUZIONE
2020  REM   DEL SISTEMA MATRICIALE AA*X=BB
2030  REM   PER I DETTAGLI CFR PROGRAMMA SPECIFICO
2040  REM  ****************************************
2050 N1 = N - 1:M1 = M - 1:DET = 1
2060  FOR K = 0 TO N1
2070 PV = AA(K,K):IK = K:JK = K:PAV =  ABS (PV)
2080  FOR I = K TO N1: FOR J = K TO N1
2090  IF  ABS (AA(I,J)) > PAV THEN PV = AA(I,J):PAV =  ABS (PV):IK = I:JK =
     J
2100  NEXT J,I
2110 PC(K) = JK:PL(K) = IK
2120 IF IK <  > K THEN DET =  - DET
2130  IF JK <  > K THEN DET =  - DET
2140 DET = DET * PV
2150  IF DET = 0 THEN  HOME : PRINT "IL DETERMINANTE E'NULLO,NESSUNA SOLUZ
     IONE": END
2160  IF IK = K THEN  GOTO 2200
2170  FOR I = 0 TO N1:TT = AA(IK,I):AA(IK,I) = AA(K,I):AA(K,I) = TT: NEXT
     I
2180  IF M1 =  - 1 THEN  GOTO 2200
2190  FOR I = 0 TO M1:TT = BB(IK,I):BB(IK,I) = BB(K,I):BB(K,I) = TT: NEXT
     I
2200  IF JK = K THEN  GOTO 2220
2210  FOR I = 0 TO N1:TT = AA(I,JK):AA(I,JK) = AA(I,K):AA(I,K) = TT: NEXT
     I
2220  FOR I = 0 TO N1:CS(I) = AA(I,K):AA(I,K) = 0: NEXT I
2230 CS(K) = 0:AA(K,K) = 1
2240  FOR I = 0 TO N1:AA(K,I) = AA(K,I) / PV: NEXT I
2250  IF M1 =  - 1 THEN  GOTO 2270
2260  FOR I = 0 TO M1:BB(K,I) = BB(K,I) / PV: NEXT I
2270  FOR J = 0 TO N1: IF J = K THEN  GOTO 2310
2280  FOR I = 0 TO N1:AA(J,I) = AA(J,I) - CS(J) * AA(K,I): NEXT I
2290  IF M1 =  - 1 THEN  GOTO 2310
2300  FOR I = 0 TO M1:BB(J,I) = BB(J,I) - CS(J) * BB(K,I): NEXT I
2310  NEXT J
2320  NEXT K
2330  FOR I = N1 TO 0 STEP  - 1:IK = PC(I)
2340  IF IK = I THEN  GOTO 2380
2350  FOR J = 0 TO N1:TT = AA(I,J):AA(I,J) = AA(IK,J):AA(IK,J) = TT: NEXT
     J
2360  IF M1 =  - 1 THEN  GOTO 2380
2370  FOR J = 0 TO M1:TT = BB(I,J):BB(I,J) = BB(IK,J):BB(IK,J) = TT: NEXT
     J
2380  NEXT I
2390  FOR J = N1 TO 0 STEP  - 1:JK = PL(J)
2400  IF JK = J THEN  GOTO 2420
2410  FOR I = 0 TO N1:TT = AA(I,J):AA(I,J) = AA(I,JK):AA(I,JK) = TT: NEXT
     I
2420  NEXT J
2430  RETURN
```

5 — ESEMPIO PRATICO

L'esempio presentato è relativo ad una regressione lineare a 4 parametri (NP = 4) relativa a 6 gruppi di dati (ND = 6):

X_1 =	1	1	1	1	1	1
X_2 =	0	1	1	4	1	0
X_3 =	0	0	1	3	3	1
X_4 =	0	0	0	2	2	0
y =	0.98	3.96	1.99	−2.98	−12.01	−1

viene inoltre calcolata l'interpolazione per $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

```
 RUN
        PROGRAMMA DI REGRESSIONE
           LINEARE MULTIPLA

                    AUTORE:H.HAUT


1.DEFINIRE IL NUMERO DI GRUPPI DI DATI
  N E DI PARAMETRI NP

2.INSERIRE POI GLI ND GRUPPI DI DATI
  SECONDO IL SEGUENTE MODELLO:

    Y(I)=B(1)*X(I,1) + B(2)*X(I,2) + ..
         ..+B(NP)*X(I,NP)

         I=1,2,...,ND

3.SE B(1) RAPPRESENTA UN TERMINE COSTAN-
  TE, TUTTI GLI X(I,1) DEVONO ESSERE
  UGUALI A 1)
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE
MODELLO:
    Y(I)=B(1)*X(I,1) + B(2)*X(I,2) + ..
         ..+B(NP)*X(I,NP)

         I=1,2,...,ND

NUMERO DI PARAMETRI: NP=4
NUMERO DI DATI:      ND=6

GRUPPO 1 DI DATI
         X(1,1)
                   =1
         X(1,2)
                   =0
         X(1,3)
                   =0
         X(1,4)
                   =0
         Y(1)
                   =0.98
```

```
GRUPPO 2 DI DATI
          X(2,1)
                    =1
          X(2,2)
                    =1
          X(2,3)
                    =0
          X(2,4)
                    =0
          Y(2)
                    =3.96

GRUPPO 3 DI DATI
          X(3,1)
                    =1
          X(3,2)
                    =1
          X(3,3)
                    =1
          X(3,4)
                    =0
          Y(3)
                    =1.99

GRUPPO 4 DI DATI
          X(4,1)
                    =1
          X(4,2)
                    =4
          X(4,3)
                    =3
          X(4,4)
                    =2
          Y(4)
                    =-2.98


GRUPPO 5 DI DATI
          X(5,1)
                    =1
          X(5,2)
                    =1
          X(5,3)
                    =3
          X(5,4)
                    =2
          Y(5)
                    =-12.01


GRUPPO 6 DI DATI
          X(6,1)
                    =1
          X(6,2)
                    =0
          X(6,3)
                    =1
          X(6,4)
                    =0
          Y(6)
                    =-1

SOMMA RESIDUA DEI QUADRATI= 5.36363637E-
04
VARIANZA DEGLI X(I)        = 2.68181818E-
04
```

```
STRIMA DEI                DEVIAZIONI
PARAMETRI                 STANDARD
**************            **********
B(1)=.967272719           .0120946679
B(2)=3.00545455           6.98285977E-03
B(3)=-1.97499998          .0163762578
B(4)=-5.02545457          .0227613381

SE NON SI VUOLE LA MATRICE DELLE
COVARIANZE, PREMERE ESC ALTRIMENTI UN AL
TRO TASTO
COLONNA 1 DELLA MATRICE DI COVARIANZA:
     1.46280992E-04
    -2.43801653E-05
    -1.34090909E-04
     1.58471075E-04
PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
COLONNA 2 DELLA MATRICE DI COVARIANZA:
    -2.43801653E-05
     4.87603306E-05
    -3.50010768E-14
    -4.87603306E-05
PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
COLONNA 3 DELLA MATRICE DI COVARIANZA:
    -1.34090909E-04
     4.06110055E-14
     2.68181819E-04
    -3.35227274E-04
PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
COLONNA 4 DELLA MATRICE DI COVARIANZA:
     1.58471075E-04
    -4.87603307E-05
    -3.35227274E-04
     5.18078513E-04
PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE

INTERPOLAZIONE?(S O N): S
X1=
       1
X2=
       1
X3=
       1
X4=
       1

Y=     -3.02772728


INTERPOLAZIONE?(S O N): N
```

tempo d'esecuzione: 7"3
memoria richiesta: 6881 bytes (senza REM : 3385).

PROGRAMMA NUMERO 16

ADATTAMENTO AD UN POLINOMIO

1 — METODO NUMERICO

L'adattamento di dati sperimentali ad una funzione polinomiale può essere visto come un caso particolare di regressione lineare multipla applicata al modello teorico

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_d x_i^d$$

Il problema consiste pertanto nella ricerca degli estimatori b_0, b_1, ..., b_d dei coefficienti β_0, β_1, ..., β_d utilizzando le n coppie di dati sperimentali (x_i, y_i).

Il metodo ricalca essenzialmente quello svolto nel capitolo precedente. Le matrici X e Y vengono definite nel modo seguente:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^d \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^d \\ & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^d \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

Il numero dei parametri β_i risulta essere $r = d + 1$ (ove d è il grado del polinomio).

Il programma fornisce gli estimatori dei parametri β_i, la loro deviazione standard, lo scarto quadratico, la varianza di y_i, la matrice Σ_b delle covarianze e permette di stimare il valore y relativo ad un qualsiasi valore x. Il programma infine fornisce, a richiesta, un grafico del polinomio interpolatore con una rappresentazione dei dati sperimentali.

Riferimenti bibliografici: C5, G1, H2, W1.

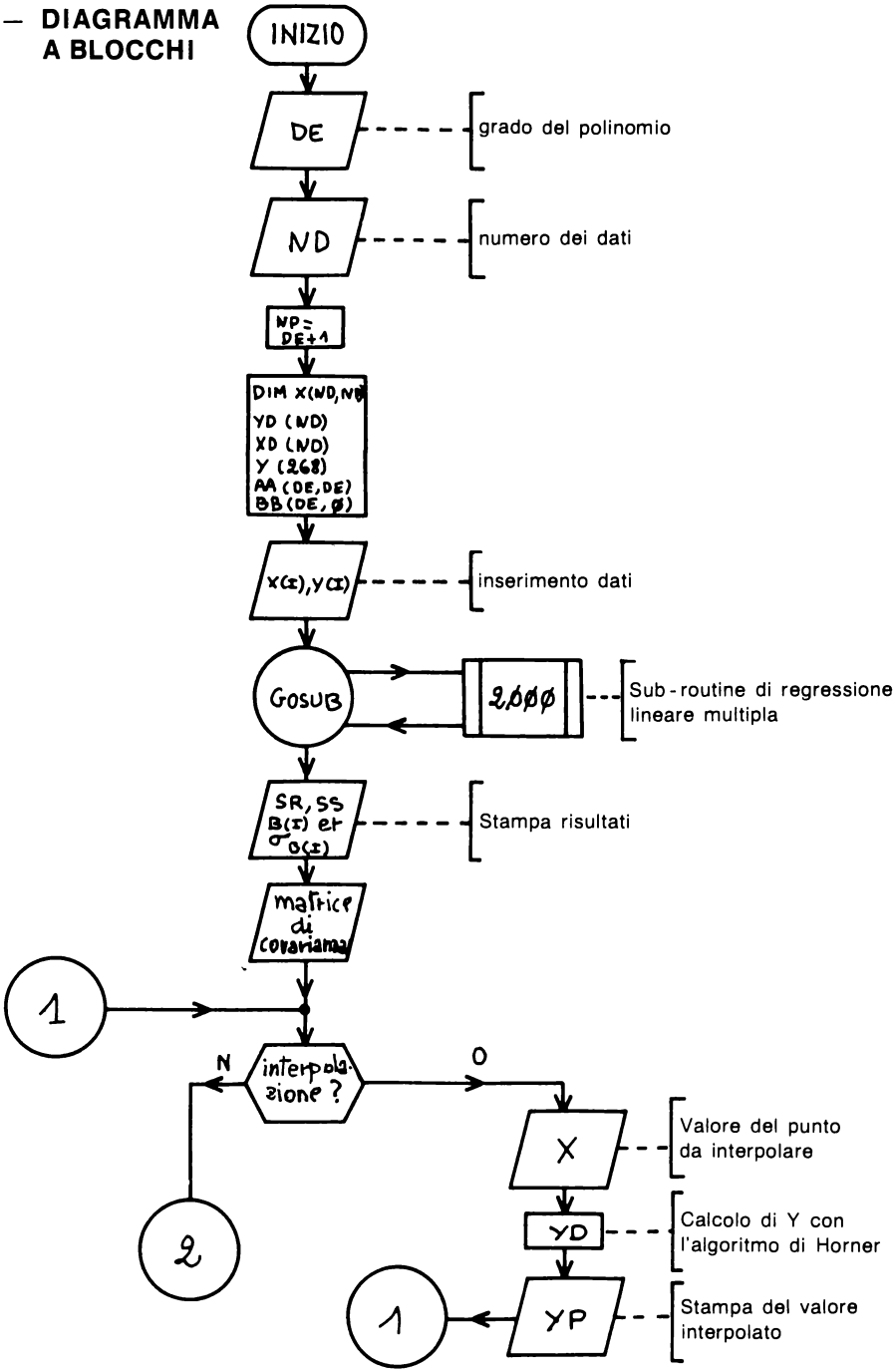
Nota tecnica:

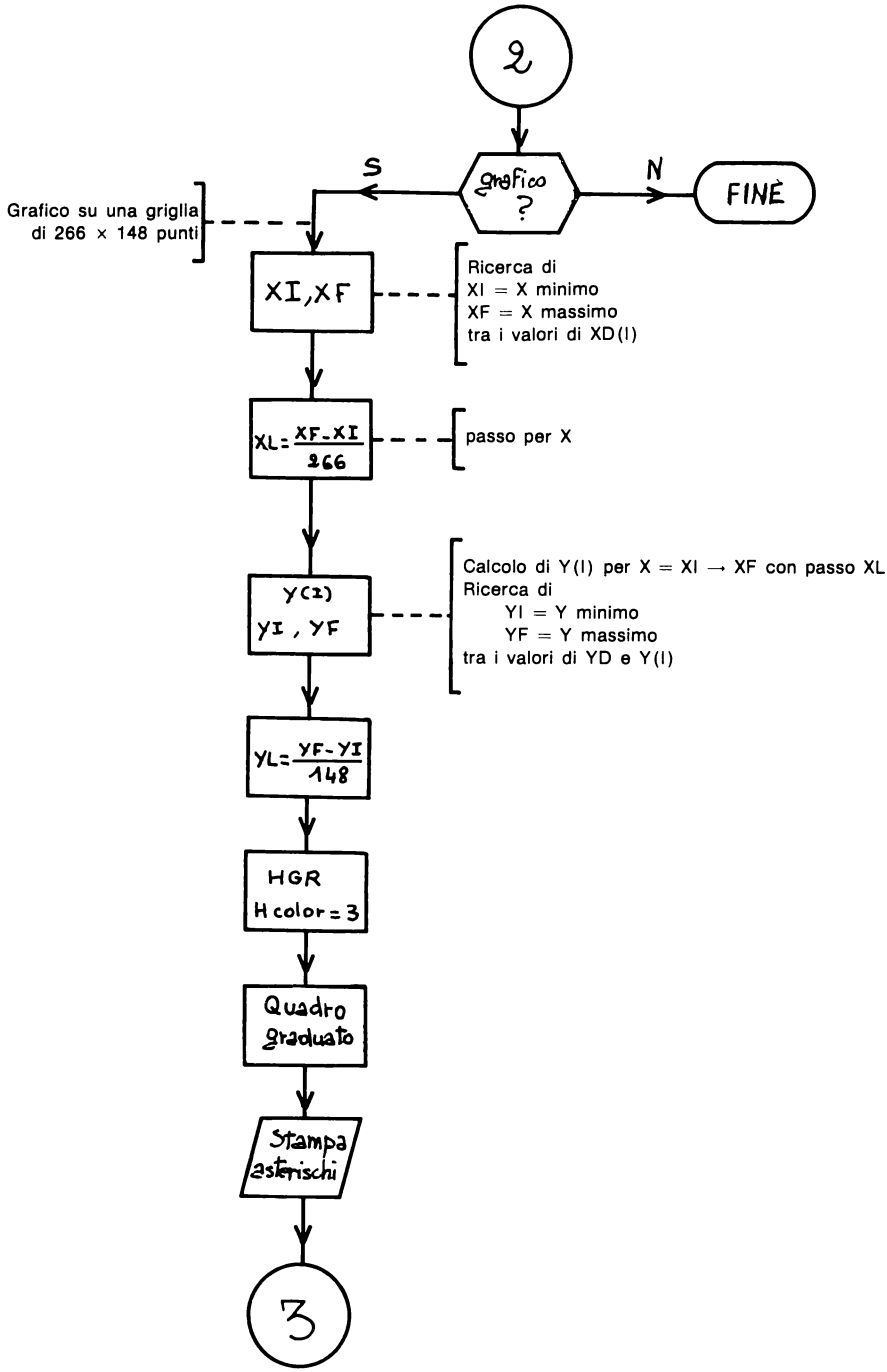
Il programma corrispondente al listing presentato qui di seguito richiede la disponibilità di una memoria superiore a 16K per fornire una rappresentazione grafica del polinomio. Per far "girare" ugualmente il programma su un elaboratore con una memoria di 16K occorre eliminare buona parte delle linee di commento. In particolare si consiglia di sopprimere le seguenti linee presenti nel listing:

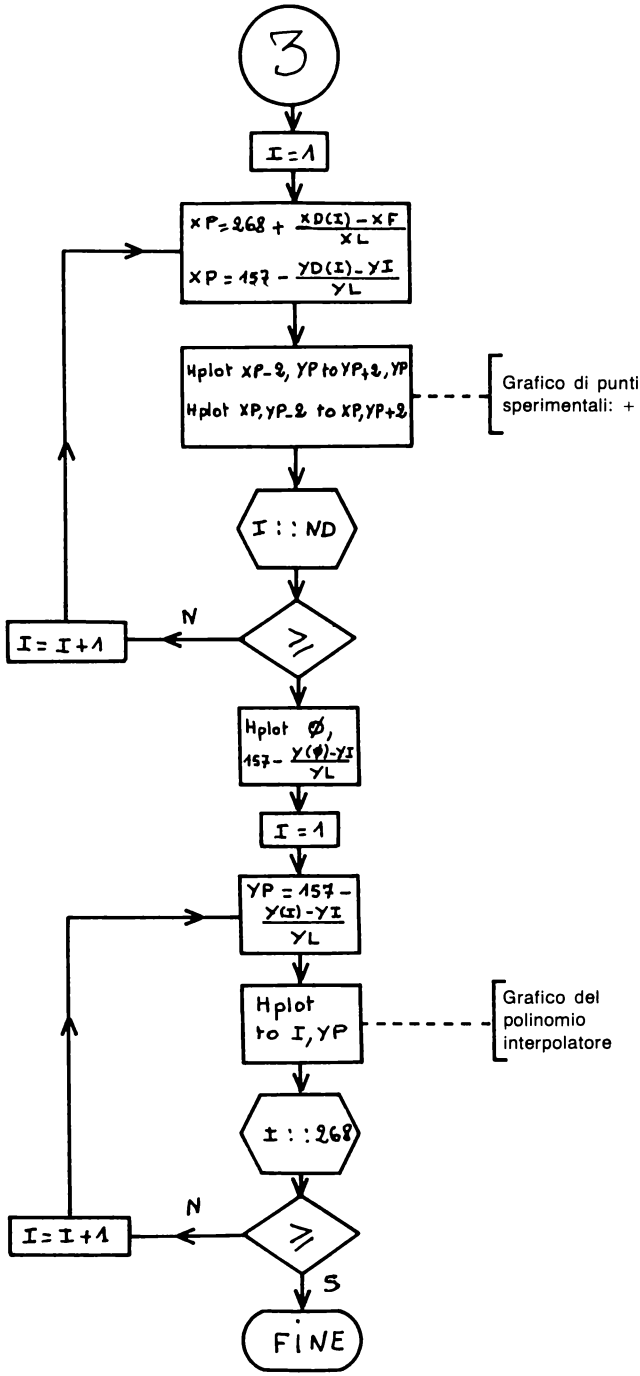
1–120, 190–280, 360–380, 450–470, 490–510, 610–630, 760–780, 820, 900–920, 950–960, 1040–1070, 1120, 1220–1230, 1290–1310, 1330, 1410, 1450, 1520, 2010–2270, 2290–2310, 2380–2400, 3010–3080, 4010–4050.

Si può inoltre notare che le due sub-routines relative alla regressione lineare multipla ed alla risoluzione di un sistema sono presentate in forma compatta; ciò permetterà al lettore, confrontandole con quelle presentate nei capitoli precedenti, di rendersi conto dei vantaggi ottenuti sia in termini di memoria utilizzata che di velocità di esecuzione.

2 — DIAGRAMMA A BLOCCHI




2
grafico ?
S
N
FINE
Grafico su una griglia di 266 x 148 punti
XI,XF
Ricerca di
XI = X minimo
XF = X massimo
tra i valori di XD(I)
XL=(XF-XI)/266
passo per X
Y(I)
YI , YF
Calcolo di Y(I) per X = XI → XF con passo XL
Ricerca di
YI = Y minimo
YF = Y massimo
tra i valori di YD e Y(I)
YL=(YF-YI)/148
HGR
H color = 3
Quadro graduato
Stampa asterischi
3


3
I=1
XP=268 + (XD(I) - XF)/XL
XP = 157 - (YD(I) - YI)/YL
Hplot XP-2, YP to YP+2, YP
Hplot XP, YP-2 to XP, YP+2
Grafico di punti sperimentali: +
I : : ND
N
I = I+1
≥
Hplot Ø,
157 - (Y(Ø)-YI)/YL
I = 1
YP = 157 - (Y(I) - YI)/YL
Hplot to I, YP
Grafico del polinomio interpolatore
I : : 268
N
I = I+1
≥
S
FINE

3 — PROGRAMMA

```
1  REM      ADATTAMENTO AD UN POLINOMIO
2  REM            DI GRADO DE.
3  REM
4  REM                        AUTORE:H.HAUT
5  REM
6  REM
7  REM    DESCRIZIONE:
8  REM      IL PROGRAMMA PERMETTE DI ADATTARE UN INSIEME
9  REM      DI DATI SPERIMENTALI AD UN POLINOMIO DI GRADO
10  REM     DE: Y=B(0) + B(1)*X + B(2)*X^2 + ... + B(DE)* X^DE
11  REM
12  REM
100  REM
110  REM   REGOLE D'USO
120  REM
130  HOME
140  PRINT  TAB( 8);"ADATTAMENTO A UN POLINOMIO"
150  PRINT  TAB( 14);"DI GRADO DE "
160  PRINT
170  PRINT  TAB( 20);"AUTORE:H.HAUT"
180  PRINT : PRINT
190  PRINT "1.DEFINIRE IL GRADO DEL POLINOMIO         E IL NUMERO DEI DATI
      SPERIMENTALI"
200  PRINT
210  PRINT "2.INTRODURRE POI LE ND COPPIE DI DATI     X(I),Y(I) DA ADATTAR
     E AL POLINOMIO:     Y=B(0) + B(1)*X + ... + B(DE)*X^DE"
220  PRINT
230  PRINT "3.IL PROGRAMMA FORNISCE GLI ESTIMATORI    DEI B(I),LA MATRICE
     DELLE COVARIANZE,   DA' LA POSSIBILITA' DI EFFETTUARE UNA   INTERPOLA
     ZIONE E IL RELATIVO GRAFICO"
240  VTAB (22): PRINT "PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE  ": GET A$
250  REM
260  REM   GESTIONE DEI DATI IN INPUT
270  REM
280  HOME
290  INPUT "GRADO DEL POLINOMIO= ";DE
300  PRINT
310  INPUT "NUMERO DI DATI= ";ND
320  REM
330  REM   ISTRUZIONI DI DIMENSIONAMENTO
340  REM
350  DIM X(ND,DE + 1),YD(ND),AA(DE,DE),BB(DE,0),Y(268),XD(ND)
360  REM
370  REM   INSERIMENTO DATI
380  REM
390  PRINT
400  FOR I = 1 TO ND
410  PRINT
420  PRINT I:CV =  PEEK (37): VTAB (CV): HTAB (10): INPUT "X=";XD(I)
430  HTAB (10): INPUT "Y=";YD(I)
440  NEXT I
450  REM
460  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA
470  REM
480  GOSUB 2000
490  REM
500  REM    GESTIONE DEI RISULTATI
510  REM
520  HOME
530  PRINT "SOMMA RESIDUA DEI QUADRATI= ";SR
540  PRINT "VARIANZA D XI= ";SS
550  PRINT "ESTIMATORI DEI"; TAB( 25);"DEVIAZIONI"
560  PRINT "  PARAMETRI "; TAB( 25);"STANDARD "
570  PRINT "***************"; TAB( 25);"**********"
```

```
580  FOR I = 0 TO DF
590 SD =  SQR (AA(I,I))
600  PRINT "B(";I;")=";BB(I,0); TAB( 25);SD
610  REM
620  REM    STAMPA A RCHIESTA DELLA MATRICE DI COVARIANZA
630  REM
640  NEXT I
650  PRINT : PRINT "SE SI VUOLE LA MATRICE DELLE COVARIANZE BATTERE UN TAS
     TO ALTRIMENTI ESC": GET A$
660  IF  ASC (A$) = 27 THEN  GOTO 790
670  FOR I = 0 TO DE
680  HOME
690  PRINT "MATRICE DI COVARIANZA"
700  PRINT "COLONNA ";I;":"
710  FOR J = 0 TO DF
720  PRINT  TAB( 5);AA(J,I)
730  NEXT J
740  PRINT : PRINT "PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE": GET A$
750  NEXT I
760  REM
770  REM   FACOLTA' DI INTERPOLAZIONE
780  REM
790  PRINT : INPUT "INTERPOLAZIONE? (S O N):";A$
800  IF A$ = "N" THEN  GOTO 930
810  PRINT : INPUT "X = ";X
820  REM   CALCOLO DELL'INTERPOLAZIONE CON IL METODO DI HORNER
830 P = BB(DE,0)
840  FOR I = 1 TO DE
850 J1 = DE - I
860 P = P * X + BB(J1,0)
870  NEXT I
880  PRINT "Y=";P
890  GOTO 790
900  REM
910  REM   STAMPA DEL GRAFICO (SE RICHIESTO)
920  REM
930  PRINT : INPUT "REPPRESENTAZIONE GRAFICA? (S O N):";A$
940  IF A$ = "N" THEN  END
950  REM
960  REM   CALCOLO DI X MINIMO E X MASSIMO
970  REM
980 XI = 1E38:XF =  - 1E38
990  FOR I = 1 TO ND
1000  IF XD(I) > XF THEN XF = XD(I)
1010  IF XD(I) < XI THEN XI = XD(I)
1020  NEXT I
1030 XL = (XF - XI) / 266
1040  REM   CALCOLO DI Y MINIMO E Y MASSIMO
1050  REM   E CALCOLO SIMULTANEO DEL VETTORE Y(268) CHE
1060  REM   DEFINISCE IL GRAFICO DEL POLINOMIO
1070  REM
1080 P1 = BB(DE,0)
1090 YI = 1E38:YF =  - 1E38
1100  FOR I = 0 TO 268
1110 X = XI + I * XL
1120  REM    CALCOLO DEL VALORE DEL POLINOMIO IN X
1130 P = P1
1140  FOR J = 1 TO DE
1150 J1 = DE - J
1160 P = P * X + BB(J1,0)
1170  NEXT J
1180 Y(I) = P
1190  IF P > YF THEN YF = P
1200  IF P < YI THEN YI = P
1210  NEXT I
1220  REM   PROSECUZIONE DEL CALCOLO PER Y MIN. E Y MAX.
1230  REM   TRA I VALORI DATI
```

```
1240  FOR I = 1 TO ND
1250  IF YD(I) > YF THEN YF = YD(I)
1260  IF YD(I) < YI THEN YI = YD(I)
1270  NEXT I
1280 YL = (YF - YI) / 148
1290  REM
1300  REM   INIZIO DEL GRAFICO
1310  REM
1320  HOME : HGR : HCOLOR= 3
1330  REM   REALIZZAZIONE DELL'INQUADRATURA GRADUATA
1340  HPLOT 0,9 TO 0,159 TO 270,159 TO 270,9 TO 0,9
1350  FOR I = 1 TO 9
1360 XP = 27 * I:YP = 159 - 15 * I
1370  HPLOT 268,YP TO 270,YP
1380  HPLOT XP,9 TO XP,11
1390  HPLOT XP,157 TO XP,159
1400  NEXT I
1410  REM    STAMPA DEI LIMITI
1420  VTAB (21)
1430  PRINT "X:";XI;" A ";XF;" PAR ";27 * XL
1440  PRINT "Y:";YI;" A ";YF;" PAR ";15 * YL
1445  VTAB (1)
1450  REM  VISUALIZZAZIONE DEI PUNTI SPERIMENTALI
1460  FOR I = 1 TO ND
1470 XP = 268 + (XD(I) - XF) / XL
1480 YP = 157 - (YD(I) - YI) / YL
1490  HPLOT XP - 2,YP TO XP + 2,YP
1500  HPLOT XP,YP - 2 TO XP,YP + 2
1510  NEXT I
1520  REM   GRAFICO DEL POLINOMIO INTERPOLATORE
1530  HPLOT 0,157 - (Y(0) - YI) / YL
1540  FOR I = 1 TO 268
1550 YP = 157 - (Y(I) - YI) / YL
1560  HPLOT  TO I,YP
1570  NEXT I
1580  END
2000  REM  ***********************************************
2010  REM   SOTTOPROGRAMMA DI ADATTAMENTO AL POLINOMIO
2020  REM    Y=B(0) + B(1)*X + B(2)*X^2 +.. + B(DE)*X^DE
2030  REM   DEI DATI SPERIMENTALI X(I),Y(I)
2040  REM
2050  REM   REGOLE PER L'USO DEL SOTTOPROGRAMMA
2060  REM     1.DATI NECESSARI:
2070  REM       * DE=GRADO DEL POLINOMIO
2080  REM       * ND=NUMERO DI DATI
2090  REM       * XD(I)=ASCISSE DEI PUNTI
2100  REM            I=1,2,...,ND
2110  REM       * YD(I)=ORDINATE DEI PUNTI
2120  REM            I=1,2,...,ND
2130  REM     2.RISULTATI FORNITI:
2140  REM       * BB(I,0)=STIMA DI B(I)
2150  REM            I=0,1,...,DE
2160  REM       * AA(I,J)=COVARIANZA DI B(I),B(J)
2170  REM            I,J=0,1,...,DE
2180  REM       * SR=SOMMA RESIDUA DEI QUADRATI
2190  REM       * SS=VARIANZA DEGLI Y(I)
2200  REM     3.VARIABILI UTILIZZATE:
2210  REM      DE,I,J,ND,NP
2220  REM     4.VETTORI E MATRICI UTILIZZATI:
2230  REM      X(ND,DE+1),XD(ND)
2240  REM     5.SOTTOPROGRAMMI RICHIAMATI:
2250  REM        3000:REGRESSIONE LINEARE MULTIPLA
2260  REM        4000:RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE
2270  REM  ***********************************************
2280 NP = DE + 1
2290  REM
2300  REM   DEFINIZIONE DELLA MATRICE X DEL TESTO
```

```
2310  REM
2320  FOR I = 1 TO ND
2330 X(I,1) = 1
2340  FOR J = 2 TO NP
2350 X(I,J) = XD(I) ^ (J - 1)
2360  NEXT J
2370  NEXT I
2380  REM
2390  REM   CHIAMATA DEL SOTTOPROGRAMMA DI REGRESSIONE LINEARE MULTIPLA
2400  REM
2410  GOSUB 3000
2420  RETURN
3000  REM  ********************************************
3010  REM   SOTTOPROGRAMMA DI REGRESSIONE LINEARE MULTIPLA
3020  REM   VERSIONE COMPATTATA
3030  REM
3040  REM       PER IL PROGRAMMA DI REGRESSIONE LINEARE
3050  REM       MULTIPLA PER LE REGOLE D'USO
3060  REM       IL VETTORE Y(ND) E' SOSTITUITO DAL
3070  REM    VETTORE YD(ND)
3080  REM  ********************************************
3090 SR = 0:N = NP:M = 1
3100  FOR I = 0 TO NP - 1: FOR J = 0 TO NP - 1:AA(I,J) = 0: NEXT J:BB(I,0)
     = 0: NEXT I
3110  FOR I = 1 TO NP: FOR J = I TO NP: FOR K = 1 TO ND
3120 I1 = I - 1:J1 = J - 1:AA(I1,J1) = AA(I1,J1) + X(K,I) * X(K,J): NEXT K
3130 AA(J1,I1) = AA(I1,J1): NEXT J,I
3140  FOR I = 1 TO NP:I1 = I - 1: FOR K = 1 TO ND:BB(I1,0) = BB(I1,0) + X(
     K,I) * YD(K): NEXT K,I
3150  GOSUB 4000
3160  FOR I = 1 TO ND:ST = 0
3170  FOR J = 1 TO NP:J1 = J - 1:ST = ST + X(I,J) * BB(J1,0): NEXT J
3180 X(I,0) = ST: NEXT I
3190  FOR I = 1 TO ND:SR = SR + ((YD(I) - X(I,0)) ^ 2): NEXT I
3200 SS = SR / (ND - NP)
3210  FOR I = 0 TO NP - 1: FOR J = 0 TO NP - 1:AA(I,J) = AA(I,J) * SS: NEXT
     J,I
3220  RETURN
4000  REM  ****************************************
4010  REM   SOTTOPROGRAMMA PER L'INVERSIONE DI UNA MATRICE
4020  REM   IN VERSIONE COMPATTATA
4030  REM
4040  REM   LA VARIABILE DET E' SOSTITUITA CON DT
4050  REM  ****************************************
4060 N1 = N - 1:M1 = M - 1:DT = 1
4070  FOR K = 0 TO N1
4080 PV = AA(K,K):IK = K:JK = K:PAV =  ABS (PV)
4090  FOR I = K TO N1: FOR J = K TO N1
4100  IF  ABS (AA(I,J)) > PAV THEN PV = AA(I,J):PAV =  ABS (PV):IK = I:JK =
     J
4110  NEXT J,I
4120 PC(K) = JK:PL(K) = IK
4130  IF IK <  > K THEN DT =  - DT
4140  IF JK <  > K THEN DT =  - DT
4150 DT = DT * PV
4160  IF DT = 0 THEN  HOME : PRINT "IL DETERMINANTE E' NULLO, NESSUNA SOLU
     ZIONE": END
4170  IF IK = K THEN  GOTO 4210
4180  FOR I = 0 TO N1:TT = AA(IK,I):AA(IK,I) = AA(K,I):AA(K,I) = TT: NEXT
     I
4190  IF M1 =  - 1 THEN  GOTO 4210
4200  FOR I = 0 TO M1:TT = BB(IK,I):BB(IK,I) = BB(K,I):BB(K,I) = TT: NEXT
     I
4210  IF JK = K THEN  GOTO 4230
4220  FOR I = 0 TO N1:TT = AA(I,JK):AA(I,JK) = AA(I,K):AA(I,K) = TT: NEXT
     I
4230  FOR I = 0 TO N1:CS(I) = AA(I,K):AA(I,K) = 0: NEXT I
```

```
4240 CS(K) = 0:AA(K,K) = 1
4250  FOR I = 0 TO N1:AA(K,I) = AA(K,I) / PV: NEXT I
4260  IF M1 =  - 1 THEN  GOTO 4280
4270  FOR I = 0 TO M1:BB(K,I) = BB(K,I) / PV: NEXT I
4280  FOR J = 0 TO N1: IF J = K THEN  GOTO 4320
4290  FOR I = 0 TO N1:AA(J,I) = AA(J,I) - CS(J) * AA(K,I): NEXT I
4300  IF M1 =  - 1 THEN  GOTO 4320
4310  FOR I = 0 TO M1:BB(J,I) = BB(J,I) - CS(J) * BB(K,I): NEXT I
4320  NEXT J
4330  NEXT K
4340  FOR I = N1 TO 0 STEP  - 1:IK = PC(I)
4350  IF IK = I THEN  GOTO 4390
4360  FOR J = 0 TO N1:TT = AA(I,J):AA(I,J) = AA(IK,J):AA(IK,J) = TT: NEXT
     J
4370  IF M1 =  - 1 THEN  GOTO 4390
4380  FOR J = 0 TO M1:TT = BB(I,J):BB(I,J) = BB(IK,J):BB(IK,J) = TT: NEXT
     J
4390  NEXT I
4400  FOR J = N1 TO 0 STEP  - 1:JK = PL(J)
4410  IF JK = J THEN  GOTO 4430
4420  FOR I = 0 TO N1:TT = AA(I,J):AA(I,J) = AA(I,JK):AA(I,JK) = TT: NEXT
     I
4430  NEXT J
4440  RETURN
```

4 — ESEMPIO PRATICO

L'esempio illustra l'adattamento ad un polinomio di terzo grado delle 7 coppie di valori sperimentali:

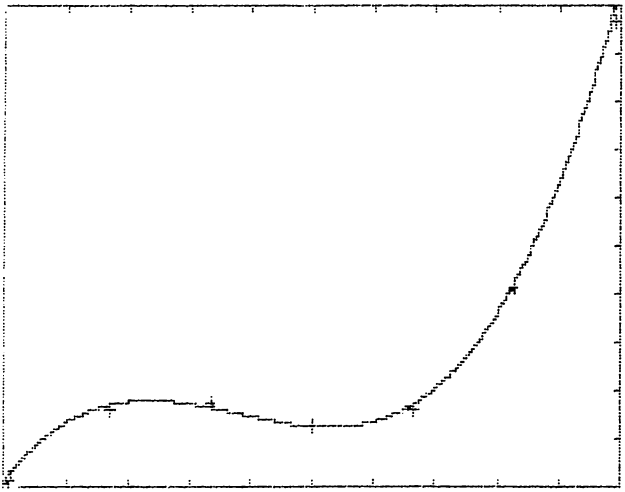
x =	− 3,	− 2,	− 1,	0,	1,	2,	3
y =	− 4,5,	2.7,	3.1,	0.9,	2.6,	15.1,	42.6

e fornisce la stima dei parametri, la matrice delle covarianze, una interpolazione per x = 0.5 ed una rappresentazione grafica dei dati sperimentali e della funzione polinomiale calcolata.

```
]RUN
        ADATTAMENTO A UN POLINOMIO
              DI GRADO DE

                    AUTORE:H.HAUT


1.DEFINIRE IL GRADO DEL POLINOMIO
  E IL NUMERO DEI DATI SPERIMENTALI

2.INTRODURRE POI LE ND COPPIE DI DATI
  X(I),Y(I) DA ADATTARE AL POLINOMIO:
  Y=B(0) + B(1)*X + ... + B(DE)*X^DE

3.IL PROGRAMMA FORNISCE GLI ESTIMATORI
  DEI B(I),LA MATRICE DELLE COVARIANZE,
  DA' LA POSSIBILITA' DI EFFETTUARE UNA
  INTERPOLAZIONE E IL RELATIVO GRAFICO
PREMERE UN TASTO PER PROSEGUIRE
GRADO DEL POLINOMIO= 3
```

```
NUMERO DI DATI= 7


1
          X=-3
          Y=-4.5

2
          X=-2
          Y=2.7

3
          X=-1
          Y=3.1

4
          X=0
          Y=0.9

5
          X=1
          Y=2.6

6
          X=2
          Y=15.1

7
          X=3
          Y=42.6
SOMMA RESIDUA DEI QUADRATI= .303333339
VARIANZA D XI= .101111113
ESTIMATORI DEI            DEVIAZIONI
  PARAMETRI               STANDARD
**************            **********
B(0)=.842857139           .183585687
B(1)=-.930158738           162936657
B(2)=2.02142857           .0346944336
B(3)=.977777778           .0216357806

SE SI VUOLE LA MATRICE DELLE COVARIANZE
BATTERE UN TASTO ALTRIMENTI ESC
MATRICE DI COVARIANZA



COLONNA 0:
     .0337037043
     1.52689317E-11
     -4.8148149E-03
     -1.94105385E-12

PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
MATRICE DI COVARIANZA
COLONNA 1:
     1.52689316E-11
     .0265483543
     -3.3645922E-12
     -3.27674902E-03

PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
MATRICE DI COVARIANZA
COLONNA 2:
     -4.8148149E-03
     -3.3645922E-12
     1.20370372E-03
     4.46338587E-13
```

```
PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE
MATRICE DI COVARIANZA
COLONNA 3:
     -1.94105385E-12
     -3.27674902E-03
     4.46338586E-13
     4.68107003E-04

PREMERE UN TASTO PER CONTINUARE

INTERPOLAZIONE? (S O N):S

X = 0.5
Y=1.00535714

INTERPOLAZIONE? (S O N):S

X = -0.5
Y=1.69107143

INTERPOLAZIONE? (S O N):N

REPPRESENTAZIONE GRAFICA (S O N):S
```



tempo d'esecuzione : 10"2 (+ 26" per il grafico)

memoria richiesta : 5869 bytes (per poter eseguire il grafico occorrono invece più di 16K. Se non si dispone di tale capacità è necessario, come indicato in precedenza, eliminare dal testo del programma le frasi di commento).

BIBLIOGRAFIA

A1 — Handbook of Mathematical Functions
Abramowitz M. and Segun I.A.
(Dover Publications Inc. New-York 1968)

A2 — Numerical Methods that Works
Acton F.S.
(Harper and Row Publishers 1970)

B1 — Computing Methods (due volumi)
Berezin and Zhidkov
(Pergamon Press 1965)

B2 — Numerical Methods
Buckingham R.A.
(Sir Isaac Pitman & Sons Ltd London 1962)

B3 — An introduction to Numerical Methods
Butler R. and Kerr E.
(Sir Isaac Pitman & Sons Ltd London)

C1 — Principles of Computation
Calingaert P.
(Addison-Wesley 1965)

C2 — Analyse numérique
Carasso C.
(Lidec Inc. Montréal 1971)

C3 — Introduction to Numerical Analysis
Celia C.W.
(Mc Graw Hill 1969)

C4 — Numerical Analysis
Cohen A.M.
(Mc Graw Hill 1973)

C5 — Fitting Equations to Data
Cuthbert D. and Wood F.
(J. Wiley & Sons 1980)

D1 — Eléments de Calcul Numérique
Demidovitch B. et Maron I.
(Editions de Moscou 1979)

G1 — Statistical Treatment of Experimental Data
Green J.R. and Margerison D.
(Elsevier 1979)

H1 — Travaux Pratiques de Calcul Numérique
Hennequin A.
(Vuibert 1966)

H2 — Lectures on Elementary Statistics and Probability
Hudson D.J.
(CERN Report 63–29, 64–18)

J1 — A first Course in Computing and Numerical Methods
Jacquez J.A.
(Addison-Wesley 1969)

J2 — Handbook of Statistical Distributions
Jagdish K.P., Kapadia C.H. and Owen D.B.
(Marcel Dekker Inc., New York 1976)

L1 — Méthodes et Techniques de l'Analyse Numérique
Legras J.
(Dunod 1971)

L2 — Précis d'Analyse Numérique
Legras J.
(Dunod 1963)

L3 — Introduction à l'Analyse Numérique
Louis F.
(Testo utilizzato nel corso CERN 1969/70)

M1 — Data Analysis for Scientists and Engineers
Meyer S.L.
(J. Wiley & Sons New-York 1975)

S1 – Numerical Methods in Engineering
Salvadori M.G. and Baron M.L.
(Prentice - Hall Inc. 1961)

S2 – Theory and Problems of Numerical Analysis
Scheid F.
(Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill 1968)

S3 – Introduction to Numerical Analysis
Stoer J. and Bulirsch
(Springer - Verlag 1980)

W1 – Numerical Analysis, the Mathematics of Computing (due volumi)
Watson W.A. Philipson T. and Oates P.J.
(Edward Arnold 1964)

Leggendo questo libro il lettore potrà formarsi quella logica di base indispensabile per la risoluzione di problemi di matematica e statistica.
Potrà altresì ottenere quattro risultati parimenti importanti.
Comprendere a fondo la materia grazie all'approccio metodico di analisi del problema. Approfondire i concetti di programmazione conosciuti. Eliminare la risoluzione "a mano" un'inutile perdita di tempo. Avere alla fine, dei programmi che possono essere utilizzati sia singolarmente che in un ambito più vasto.
Ad ogni programma viene preposta un'esposizione schematica del metodo numerico e delle tecniche di programmazione utilizzate il diagramma a blocchi relativo all'algoritmo, il listato (direttamente da calcolatore) e un esempio pratico (anche'esso ottenuto da calcolatore) in cui tra l'altro vengono specificati il tempo e la quantità di memoria impiegati.
Per la codifica dei programmi presentati (strutturati in due parti, una generale, assicura la gestione corretta su video dell'input/output, l'altra, costituita da una routine a sua volta suddivisibile in più subroutine, è la risoluzione del problema) si è utilizzato il BASIC Applesoft implementato sul sistema Apple II.
Le particolarità di questa versione, però, sono utilizzate solo nella gestione input/output, per cui risulta molto semplice adattare gli stessi programmi ad altre versioni BASIC.

L. 16.000

Cod. 552D ISBN 88-7056-127-5

GRUPPO
EDITORIALE
JACKSON

Hervé Haut

PROGRAMMI DI MATEMATICA E STATISTICA in BASIC

71